

Remarques :

1- Modélisation des oscillations amorties avec Synchronie (en électricité ou en mécanique) :

Avec la variable u =tension aux bornes du condensateur : $d^2u/dt^2 + R/L du/dt + u/LC = E/LC$ ou 0

Ou en mécanique (force de frottement fluide $-f\dot{v}$ ou $-\lambda v$)

Rotation : $d^2\theta/dt^2 + f/I d\theta/dt + C\theta/I = \ddot{\theta}_0$

Déplacement : $d^2x/dt^2 + \lambda/m dx/dt + kx/m = A_0$

L'équation peut se mettre sous la forme générale

$$d^2y/dt^2 + 1/\tau dy/dt + \omega_0^2 y = \omega_0^2 y_0 \quad \text{ou} \quad d^2y/dt^2 + \omega_0/Q dy/dt + \omega_0^2 y = \omega_0^2 y_0$$

Avec $\Delta = \omega_0^2 (1/Q^2 - 4) = -4\omega_0^2 (1 - 1/(4Q^2))$: $s = -\omega_0/2Q \pm \omega_0 (1 - 1/(4Q^2))^{1/2}$

Si $Q > 1/2$ la solution est du type pseudopériodique

$$y = A \cos(\Omega t + \phi) e^{-t/2\tau} = A \cos(\Omega t + \phi) e^{-t\omega_0/2Q}$$

Avec $\Omega = \omega_0 \left(\sqrt{1 - 1/(4Q^2)} \right)$ et $Q = \omega_0 \tau$

Si $Q < 1/2$ la solution est du type apériodique $y = A e^{s_1 t} + B e^{s_2 t}$

$$\text{avec } s_{1/2} = -\frac{1}{2\tau} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2} \right)$$

Si $Q = 1/2$ la solution est du type critique $y = (A + B t) e^{-t/2\tau}$

Les constantes A, B, ϕ sont déterminées par les conditions initiales.

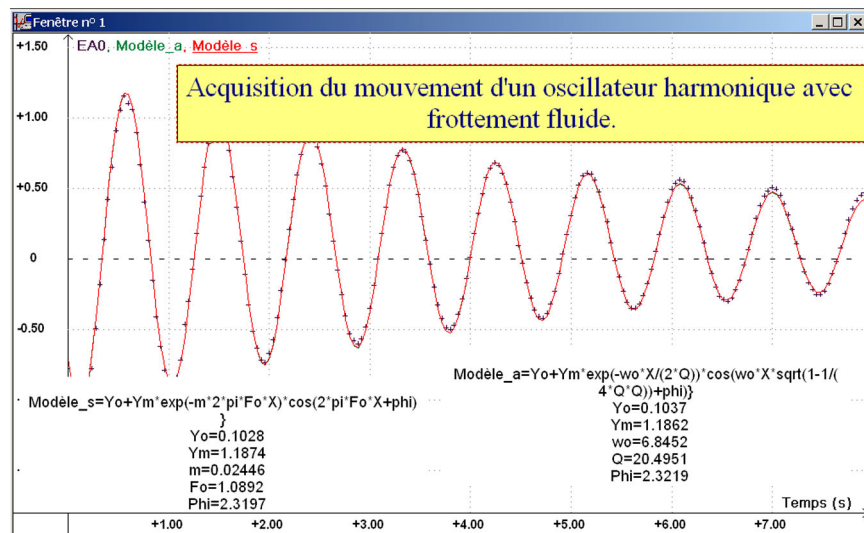
Synchronie a la mauvaise idée de modéliser les sinus amortis par

Modèle = $Y_0 + Y_m \exp(-m \cdot 2 \cdot \pi \cdot F_0 \cdot X) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F_0 \cdot X + \phi)$, il faudrait donc saisir la « fonction utilisateur »

Modèle = $Y_0 + Y_m \exp(-\omega_0 \cdot X / (2 \cdot Q)) \cdot \cos(\omega_0 \cdot X \cdot \sqrt{1 - 1/(4Q^2)} + \phi)$ ou

Modèle = $Y_0 + Y_m \exp(-\pi \cdot F_0 \cdot X / Q) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F_0 \cdot X \cdot \sqrt{1 - 1/(4Q^2)} + \phi)$,

lancer la modélisation « standard », noter les valeurs de F_0, ϕ, Y_0 et Y_m puis la modélisation utilisateur en rentrant les valeurs précédemment notées dans les cases des paramètres de modélisation. Lancer l'optimisation, dans ces conditions, Synchronie doit trouver rapidement une bonne solution



2- Valeurs expérimentales de Q et $(1 - \Omega/\omega_0)$

Q	2	2.5	3.55	5	8	11
$1 - \Omega/\omega_0$	3.2%	2%	1%	0.5%	0.2%	0.1%

Compte tenu de la précision des mesures, dès que $Q > 4$ on pourra prendre $\Omega = \omega_0$ et se contenter de :

Modèle = $Y_0 + Y_m \exp(-m \cdot 2 \cdot \pi \cdot F_0 \cdot X) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F_0 \cdot X + \phi) = Y_0 + Y_m \exp(-\omega_0 \cdot X / (2 \cdot Q)) \cdot \cos(\omega_0 \cdot X + \phi)$

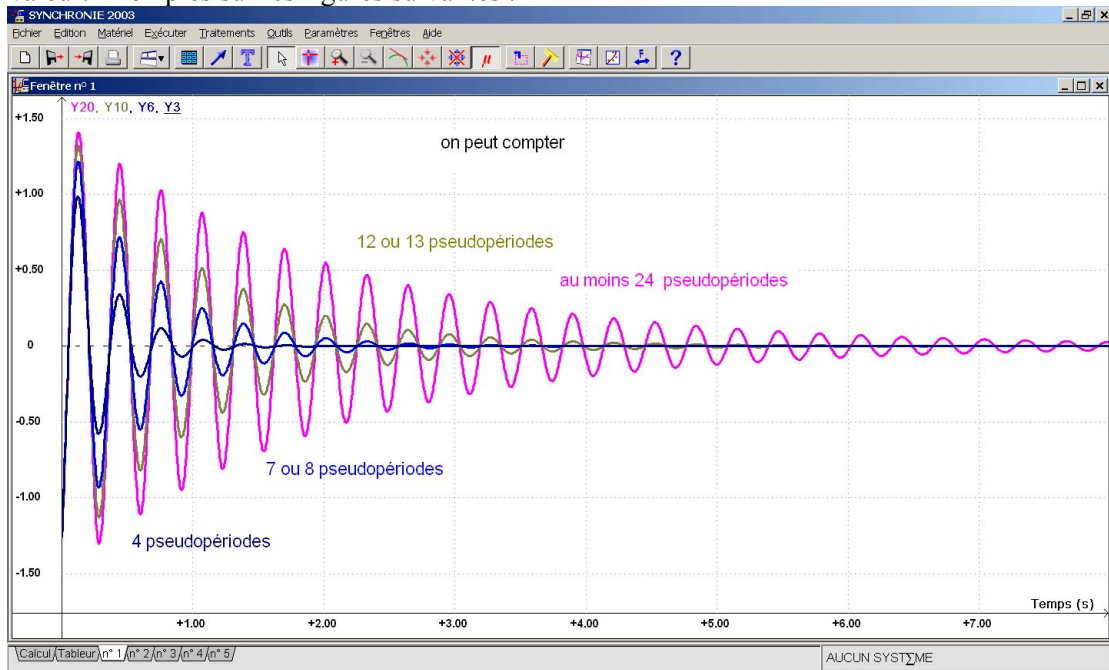
3- « Lecture automatique » de la valeur approchée de Q

Si $Q > 1/2$ la solution est du type pseudopériodique $y = A \cos(\Omega t + \phi) e^{-t/2\tau}$

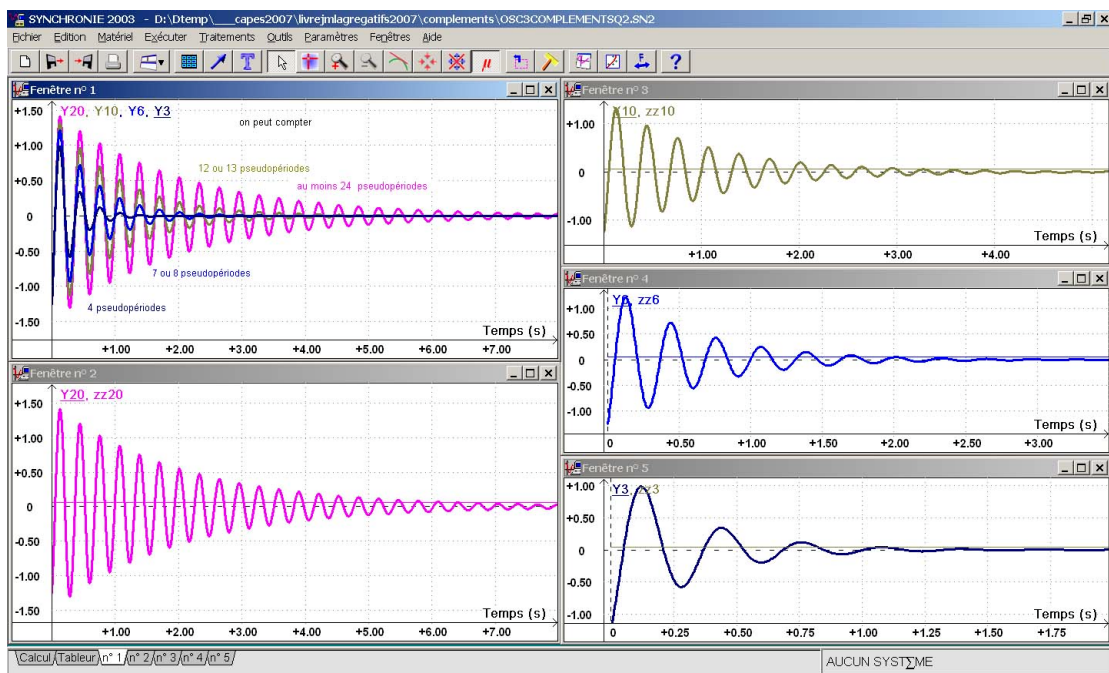
$$y = A \cos(\Omega t + \phi) e^{-t\omega_0/2Q} \quad \text{ou} \quad y = A \cos(\Omega t + \phi) e^{-t2\pi/2QT_0}$$

Si on regarde à l'instant $t=QT_0$, l'amplitude vaut $e^{-\pi} = 0.043 = 1/23.14$, on admet alors que la valeur approchée de Q est donnée par le nombre de pseudopériodes que l'on peut distinguer à l'écran ou sur l'enregistrement.

En général on trouve un Q majoré de 20%. La bonne méthode, si on a pas accès à une modélisation consiste à prendre la valeur maximale divisée par 23.14 et compter les maxima secondaires supérieur à cette valeur. Exemples sur les figures suivantes :



et



avec la feuille de calcul de Synchronie suivante :

$Y_0=0.0$ $Y_m=1.5$ $\omega_0=20$ $\Phi=-2.56$ $Q=20$ $Y_{20}=Y_0+Y_m \cdot \exp(-\omega_0 t / (2 \cdot Q)) \cdot \cos(\omega_0 t \cdot \sqrt{1 - 1/(4 \cdot Q \cdot Q)}) + \Phi$ $z=\max(Y_{20})/23.14$ $zz_{20}=\text{table}(z)$ $Q=10$ $Y_{10}=Y_0+Y_m \cdot \exp(-\omega_0 t / (2 \cdot Q)) \cdot \cos(\omega_0 t \cdot \sqrt{1 - 1/(4 \cdot Q \cdot Q)}) + \Phi$	$z=\max(Y_{10})/23.14$ $zz_{10}=\text{table}(z)$ $Q=6$ $Y_6=Y_0+Y_m \cdot \exp(-\omega_0 t / (2 \cdot Q)) \cdot \cos(\omega_0 t \cdot \sqrt{1 - 1/(4 \cdot Q \cdot Q)}) + \Phi$ $z=\max(Y_6)/23.14$ $zz_6=\text{table}(z)$ $Q=3$ $Y_3=Y_0+Y_m \cdot \exp(-\omega_0 t / (2 \cdot Q)) \cdot \cos(\omega_0 t \cdot \sqrt{1 - 1/(4 \cdot Q \cdot Q)}) + \Phi$ $z=\max(Y_3)/23.14$ $zz_3=\text{table}(z)$
--	---

On trouve alors les bons valeurs de Q.