

Variabilité et incertitudes dans les mesures physiques (TG5)

Mesurer, c'est faire une expérience où l'on compare une grandeur à une autre grandeur de même nature prise comme étalon.

Les objectifs

Parmi les objectifs d'enseignement que l'on peut assigner à la pratique de la mesure dans les sciences expérimentales, il en est deux qui paraissent fondamentaux :

– Comprendre que la *variabilité* associée à la mesure est un phénomène objectif. Si l'on répète plusieurs fois la mesure d'une grandeur, on obtient en général des résultats différents et cette *dispersion* des résultats est un phénomène normal. À partir d'un ensemble de mesures, on peut calculer une valeur moyenne et un écart type empiriques, ce dernier caractérisant la dispersion. Constater que répéter plusieurs fois une même opération, dans des conditions apparemment identiques, conduit à des résultats différents est surprenant. La surprise appelle explication. On peut chercher l'origine de la variabilité dans trois directions :

- la grandeur que l'on cherche à déterminer;
- l'instrument et la méthode de mesure;
- l'expérimentateur.

– Constater que la valeur moyenne de N mesures tend à se stabiliser lorsque N augmente. Faire une mesure, c'est réaliser une expérience qui comporte une part d'aléatoire : chaque mesure est un tirage dans l'ensemble (en général infini) des résultats possibles; il y a fluctuation d'échantillonnage d'une série de mesure à une autre. La valeur moyenne d'une série de mesures est elle-même sujette à fluctuation d'une série à une autre. On constate cependant expérimentalement que l'écart type de la valeur moyenne de N mesures est plus petit que l'écart type associé à une mesure dans un rapport de l'ordre de $1/\sqrt{N}$.

Ce second aspect peut être abordé à diverses occasions, mais sa formalisation relève de l'après-baccalauréat. Seul le premier objectif peut constituer un ensemble de connaissances exigibles au lycée.

Les lignes qui suivent cherchent à justifier ces objectifs, tout en proposant un vocabulaire simple. En particulier :

– On s'abstiendra de toute référence à la notion de « valeur exacte » au profit de la notion de « valeur de référence » ou de « valeur admise ». Il convient ici de distinguer le contexte d'un laboratoire de métrologie des autres contextes. Un laboratoire de métrologie a pour mission, entre autres, de déterminer les valeurs de référence de certaines grandeurs. C'est donc lui qui détermine les valeurs qui deviendront les « valeurs admises » par les utilisateurs, qui les utilisent pour étalonner leurs appareils.

– On réservera le terme « erreur » aux erreurs systématiques ou aux fautes du manipulateur. Le mot sera utilisé ainsi avec un sens proche du sens courant : une erreur, c'est ce qu'on peut éviter ou corriger.

– Le terme « incertitude » a une connotation négative, à cause de son contraire « certitude ». Les termes « variabilité » et « dispersion » ne possèdent pas cette connotation et sont en réalité plus fondamentaux, car ils renvoient au caractère aléatoire de la mesure. On partira donc de ces notions pour « construire » la notion d'incertitude de mesure.

– Il convient de distinguer soigneusement les notions empiriques des notions théoriques : par exemple, à l'issue d'une série de mesures, il est possible de caractériser la dispersion des résultats en calculant un écart type empirique s . Un écart type théorique σ suppose d'avoir choisi un modèle, c'est-à-dire ici une loi de probabilité. Dans la mesure du possible, on détermine l'écart type empirique de façon qu'il soit un bon estimateur de l'écart type théorique.

Variabilité des mesures

Les principales sources de variabilité des mesures

Explorons brièvement les trois directions repérées en introduction.

La grandeur à mesurer

En général, elle n'a pas une valeur unique, mais elle est distribuée sur un ensemble de valeurs voisines. Cette distribution ne doit pas alors être considérée comme une erreur, mais comme un fait qui contient de l'information, éventuellement intéressante. Il s'agit là d'une dispersion *intrinsèque*.

Prenons quelques exemples.

a) La taille d'un individu : chez un adulte, cette taille varie d'environ un centimètre entre le lever et le coucher (effet de tassement diurne). Elle dépend donc de la précision demandée pour son évaluation. À un mètre près, la grande majorité des adultes mesurent deux mètres. Au millimètre près, il faudra préciser le moment du jour où la mesure est faite. La variable « taille d'un individu en France à notre époque » est une variable aléatoire dont la taille de chaque individu est une réalisation. Le carnet de santé donne la distribution des résultats en fonction du temps, de la naissance à l'âge adulte, et fournit une indication de leur dispersion.

b) La largeur d'une table : une table n'est pas un objet mathématique, c'est une table réelle, dont la « largeur » varie selon l'endroit où on la mesure. Cette variation résulte du processus de fabrication lui-même, mais aussi du vieillissement du bois, qui se contracte ici, se dilate là, et se gauchit. On pourra noter les différentes valeurs mesurées, effectuer leur moyenne et observer la distribution des valeurs mesurées autour de cette valeur moyenne. Elle est sûrement plus grande pour une table ancienne que pour une table récente fabriquée en usine, donc la distribution des valeurs est significative. Il y a certes des situations où seule la seule valeur moyenne est pertinente (par exemple si l'on s'intéresse au prix du bois de la table²¹).

c) La température et la pression : ce sont, par construction, des grandeurs qui ont une dispersion. La température, par exemple, est proportionnelle à l'énergie cinétique *moyenne* des particules du milieu. Or l'énergie cinétique totale, proportionnelle à une somme de variables aléatoires (le carré des vitesses des particules), est une variable aléatoire et sa moyenne également. Pour un système macroscopique, la dispersion est totalement négligeable (elle est en $1/\sqrt{N}$, si N est le nombre de molécules). Elle devient cependant perceptible si l'on diminue le nombre de constituants, comme dans les noyaux atomiques ou les petits agrégats moléculaires ou atomiques. À l'échelle d'une particule, le concept de température n'a plus de sens. Où se situe la transition? Bonne question, sur laquelle des chercheurs travaillent en ce moment même, en étudiant notamment la signature des transitions de phase connues dans des systèmes de petite taille.

d) Le nombre d'habitants d'un pays : on a l'impression qu'il s'agit d'un nombre entier parfaitement défini. Il l'est effectivement, à chaque instant, mais quelle est l'échelle de temps de sa variation? Il y a sans arrêt des gens qui meurent, disons 600000 par an en France, à peu près autant qui naissent (un peu plus), et des gens qui se font naturaliser (peu) ou dénaturaliser (encore moins). Ça fait de l'ordre de 1,2 à 1,3 millions de signaux + 1 et - 1 à distribuer dans l'année. Pour obtenir un ordre de grandeur,

21. Parler de « table » n'a de sens que si l'on est capable d'isoler cet objet de son environnement. Or, si l'on se place à l'échelle moléculaire, c'est la notion même de *frontière nette* entre la table et le reste du monde qui disparaît. On passe de façon continue de l'intérieur de la table à l'extérieur (sur une échelle de quelques distances moléculaires), et d'ailleurs si un bois possède une odeur, c'est bien parce que des molécules le quittent sans arrêt, pour aller poursuivre leur vie dans les narines des promeneurs émerveillés. La notion usuelle de « largeur » perd donc son sens en deçà de l'échelle de quelques molécules, ce qui ne pose pas de difficulté pour la vie quotidienne. Mais notons qu'on met là le doigt sur le fait qu'un concept n'est pertinent qu'à une certaine échelle d'appréhension du monde.

supposons que cela se fasse de façon uniforme²². Comme il y a environ 30 millions de seconde dans une année, le nombre d'habitants fluctue sur une échelle de 25 secondes. Si l'on trace le nombre d'habitants en fonction du temps, on obtient donc une courbe en dents de scie (non régulière, car les naissances et les décès ne se répartissent en réalité pas de façon uniforme!). Si l'on effectue une moyenne du nombre d'habitants sur une échelle de temps de quelques dizaines de minutes, on obtient une courbe lissée, et l'on pourra caractériser l'amplitude de la dispersion du nombre d'habitants en considérant la différence entre la courbe vraie et la courbe lissée. Cette dispersion n'est ni une erreur ni une incertitude, elle peut contenir de l'information. Par exemple, y voit-on des effets systématiques, comme par exemple l'alternance des jours et des nuits? Meurt-on plus la nuit que le jour? C'est possible. Si, en revanche, on ne s'intéresse pas à cette échelle de temps, on prendra une moyenne sur un intervalle de temps plus grand. Il restera alors une autre courbe lissée, qui fera apparaître la lente dérive croissante, l'effet des guerres, des épidémies, de l'accroissement de la longévité, etc.

Remarquons que dans cette discussion, la question de la *détermination expérimentale* du nombre d'habitants a été laissée de côté. Il est intéressant d'y venir. Le nombre d'habitants à un instant donné existe bien, mais il est cependant impossible à déterminer pratiquement, car le processus de mesure (le recensement) s'effectue sur une échelle de temps bien supérieure à celle des fluctuations qui, comme on l'a vu, est de l'ordre de 25 secondes. On est dans un cas où le *temps de réponse* de l'appareil est plus lent que le *temps caractéristique des variations* de la grandeur mesurée. Et ce n'est pas tout. Il reste la question du *comptage*, nécessairement entaché d'erreurs, des vraies erreurs cette fois (là, c'est de l'expérimentateur qu'il s'agit). Comme on l'a vu dans les élections américaines de 2001, cela peut conduire à des effets rocambolesques, car la décision à prendre requiert une précision plus grande que l'erreur.

e) Les raies spectrales : elles ont toujours une « largeur » qui, *via* la quatrième relation de Heisenberg, est reliée à la durée de vie des états excités. On attribue du reste une largeur en énergie aux états eux-mêmes (qu'il s'agisse de l'échelle atomique, nucléaire, ou de l'échelle des particules dites élémentaires).

f) La radioactivité : ce phénomène fournit peut-être le meilleur exemple, en classe de terminale, de phénomène physique présentant une variabilité intrinsèque dont la signification est profonde. Le taux de comptage, dans des conditions expérimentales données, produit par un compteur Geiger ou un photomultiplicateur en présence d'une source radioactive varie de façon aléatoire. L'aléatoire du taux de comptage s'explique par le caractère aléatoire de la durée de vie d'un noyau radioactif et par le processus de « mort sans vieillissement » qui le caractérise (et dont la mécanique quantique rend compte). Mais la valeur moyenne du taux de comptage, pour un intervalle de temps d'observation donné, et sa dispersion peuvent être déterminés avec toute la précision voulue. La dispersion, ici, n'est en aucune façon une « imprécision », elle constitue une des caractéristiques du phénomène²³.

Notons enfin qu'une dispersion de la grandeur à mesurer peut également résulter de l'*influence de paramètres dont on ne contrôle pas la variation* : pression ou température lors de la mesure d'un volume, température lors de la mesure d'une résistance, variation temporelle, etc.

L'instrument de mesure

Il est caractérisé par :

- son *temps de réponse*;
- son *exactitude*, qui se décline en *justesse* (pas d'erreurs systématiques) et *fidélité* (caractérisant la variance des résultats qu'il permet d'obtenir);
- sa *sensibilité*.

22. Certains prétendent que ce n'est pas le cas et qu'il y a plus de naissances les soirs de pleine Lune, mais cela ne semble pas être confirmé par l'examen des chiffres dans les maternités!

23. Pour le cas particulier de la radioactivité, on se reportera aux documents d'accompagnement relatifs à la partie « Radioactivité » du programme de terminale scientifique, ainsi qu'au document commun physique, mathématiques et sciences de la Terre.

Faire une mesure, c'est toujours mettre en interaction un appareil avec le système à étudier, c'est donc enregistrer la *réponse* de l'appareil à une *excitation* produite par le système.

La réponse de l'instrument de mesure met un certain temps à s'établir, c'est le *temps de réponse*. Pour un phénomène qui varie dans le temps, il faut s'assurer que le temps de réponse de l'appareil est nettement plus petit que l'échelle de variation temporelle de la grandeur à mesurer (voir plus haut le cas du recensement d'une population).

Quelques exemples :

- Une chauve-souris évalue les distances d'obstacles ou de proies par émission-réception d'ultrasons. Le système n'est efficace que parce que l'intervalle de temps au cours duquel un train d'onde est émis, renvoyé par l'obstacle, reçu par l'animal et décodé par son cerveau est suffisamment bref pour que la position de l'animal pendant ce temps ait peu varié. Sinon, c'est la collision assurée ou l'impossibilité de se nourrir : *exit* la chauve-souris de la diversité des espèces!
- Certaines jauges de pression fonctionnent par déformation d'une membrane qui constitue l'une des armatures d'un condensateur. La mesure de la capacité de ce condensateur est reliée à la pression exercée sur la membrane. Pour pouvoir suivre des variations temporelles de la pression, le temps de réponse de la membrane (réponse mécanique) doit être petit devant l'échelle de temps de variation de cette pression.
- Lors d'un titrage acide-base, après chaque ajout de réactif titrant, le temps mis pour atteindre le régime permanent d'échange ionique au niveau de l'électrode de verre est bien supérieur à celui de la transformation chimique.

Un appareil de mesure fonctionne bien dans une certaine plage de valeurs de la grandeur à mesurer. Dans la mesure du possible, il faut faire fonctionner un appareil là où sa *sensibilité* est maximale, c'est-à-dire dans un domaine où une variation de la grandeur à mesurer produit la plus grande variation de l'indication de l'appareil.

Dans le cas de la jauge de pression citée plus haut, les limites extrêmes du domaine sont, vers les basses pressions, une déformation de la membrane trop petite pour être mesurée, vers les hautes pressions, la limite d'élasticité de la membrane.

Il faut distinguer sensibilité et justesse. Un appareil peut être sensible sans être juste (par exemple s'il est mal calibré). Dans le cas où la grandeur à mesurer a une dispersion intrinsèque négligeable, on dira qu'une mesure est d'autant plus exacte que l'appareil est juste et sa dispersion faible.

Les constructeurs fournissent des indications concernant la précision de leurs appareils sous forme d'incertitudes à attribuer aux mesures effectuées (par un opérateur supposé compétent) et il faut *se reporter aux notices* de fabrication pour connaître le sens précis... de la « précision » indiquée. Les incertitudes sont de nature très variée. Prenons l'exemple d'une boîte de résistances fournie avec une « précision » affichée de 0,5 %. Cette précision recouvre un aspect d'échantillonnage (le fabricant fabrique des milliers de boîtes dont les résistances varient nécessairement un peu d'un exemplaire à l'autre) et un aspect de fonctionnement (la résistance change avec la température du fil, qui dépend elle-même de l'intensité du courant qui le parcourt). Le fabricant donne une limite à l'effet de ces différents facteurs sur la valeur des résistances de la boîte, en moyenne (en moyenne sur l'ensemble des échantillons qu'il fabrique).

L'opérateur

La dernière cause de variation des résultats de la mesure d'une grandeur physique réside dans les appréciations de l'opérateur lui-même. On ne refait jamais la mesure exactement dans les mêmes conditions, parce que l'appréciation de l'opérateur change d'une mesure à la suivante : erreur de parallaxe dans le repérage d'un trait de jauge, effets de ménisque dans une pipette, fatigue, etc. D'une mesure à l'autre, pour un appareil de précision donnée, le résultat varie.

On pourra parler de mesure *juste* si l'opérateur a évité toute *erreur systématique*. Une mesure peut ainsi être fidèle (dispersion petite) sans être juste (comportant des erreurs systématiques) ou juste (pas d'erreur systématique) sans être fidèle (grande dispersion).

Remarque – Une mesure comporte en général plusieurs opérations dont chacune peut être source de variabilité. Il est important de savoir distinguer les sources de variabilité importante de celles qui sont négligeables : dans le premier cas, il faudra répéter plusieurs fois l'opération, dans le second cas ce ne sera pas nécessaire. S'il faut, par exemple, prélever un liquide avec une pipette et en effectuer la pesée, la source principale de variabilité sera souvent dans l'utilisation de la pipette : on prélèvera *plusieurs fois* du liquide dont on n'effectuera *qu'une seule* pesée.

Approche de la variabilité et de la dispersion des mesures : une stratégie possible

Dans la conduite d'une expérience, on est souvent amené à étudier une relation entre différentes grandeurs, soit qu'il s'agisse d'établir une loi empirique, soit qu'il s'agisse, connaissant une loi, de l'utiliser pour déterminer une grandeur inconnue. Ainsi, on peut chercher à établir la relation entre pression et volume pour un gaz à température constante, utiliser la relation entre tension et courant électrique pour l'étude de la résistance d'un fil conducteur, déterminer la variation de la vitesse d'un mobile au cours du temps, etc. Le résultat d'un ensemble de mesures fournit un tableau de valeurs dont on peut faire une représentation graphique. Cette représentation graphique est un excellent outil pour sensibiliser l'élève à la question de la dispersion des mesures et pour élaborer une progression dans sa compréhension. En effet :

– L'ensemble des points obtenus, reporté sur un graphique, suggère le plus souvent une courbe régulière, mais qui ne passe en général pas par tous les points : elle peut même ne passer par aucun ! Cette constatation peut amener un premier questionnement. *Étant entendu que le phénomène peut (doit?) être représenté par une courbe continue, faut-il faire passer cette courbe par tous les points obtenus, au prix d'introduire des irrégularités à petite échelle, ou faut-il au contraire chercher une courbe régulière qui passe « au mieux » par l'ensemble des points mesurés, et donc considérer que les écarts relèvent de l'aléatoire du mesurage?* (Les guillemets signalent que les termes « moyen » et « au mieux » sont utilisés ici dans leur acception *intuitive*; les élèves ne disposent pas des outils permettant de quantifier ces notions, mais la question posée peut cependant être comprise.) Cette question amène naturellement à reprendre quelques points de mesure, pour vérification. On s'aperçoit alors que les nouveaux résultats sont différents des premiers : il y a variabilité d'une mesure à l'autre. Cette constatation doit naturellement amener la réponse suivante à la question posée : il faut rechercher *une courbe régulière, qui ne passe pas nécessairement par tous les points mesurés.*

– Se pose alors la question de la « distance » des points mesurés à la courbe. Si un point est très éloigné, faut-il en tenir compte ou cela signale-t-il une erreur de manipulation? Et que signifie l'expression « très éloigné »? Si les mesures présentent une variabilité, il est clair que la situation idéale serait d'effectuer, pour chaque valeur de la grandeur portée en abscisse, un nombre suffisant (20, 50?) de mesures de l'autre grandeur. On serait ainsi conduit à reporter sur le graphique la valeur moyenne de la grandeur mesurée et l'écart type correspondant aux valeurs mesurées (comme caractérisant la dispersion de la grandeur). Une courbe moyenne qui passe dans tous les intervalles ainsi déterminés peut être considérée comme satisfaisante²⁴. On voit que la notion « d'éloignement » d'un point de la courbe moyenne est relative à l'incertitude expérimentale qui est associée à ce point.

– L'étape supplémentaire dans la progression est de s'apercevoir que *la dispersion de la valeur moyenne d'un ensemble de valeurs est plus petite que la dispersion des valeurs elles-mêmes.* Comme la plupart du temps, il n'est pas possible (ni souhaitable à ce niveau d'enseignement) d'obtenir pour chaque point une statistique de mesures suffisante, cet aspect pourra être discuté lors de la mise en commun, lorsque le travail expérimental s'y prête, des résultats des divers groupes d'élèves. Cette mise en commun doit être assortie de précautions : elle n'a de sens que si les appareils de mesure ont des caractéristiques voisines (statistiquement identiques).

24. On pourra remarquer que la grandeur portée en abscisse est elle aussi sujette à variabilité, si bien que le résultat des mesures apparaît sous forme d'un ensemble de petits rectangles et que la courbe recherchée doit passer « au plus près » de ces rectangles.

- Même lorsque l'on ne dispose que d'une mesure par point, une évaluation de la dispersion expérimentale ressort naturellement de la comparaison avec la courbe moyenne. Par un retournement de perspective, l'écart entre les points mesurés et la courbe moyenne permet d'évaluer cette dispersion.
- Lorsqu'on utilise un logiciel pour déterminer par exemple les paramètres d'une relation affine entre grandeurs, on obtient des valeurs assorties de valeurs d'écart type. Ces écarts types sont calculés par propagation des erreurs tenant compte des écarts entre points expérimentaux et courbe moyenne.

Valeur moyenne et écart type empiriques

Plaçons-nous dans le cas où l'on effectue des mesures répétées d'une même grandeur. Soit X la grandeur mesurée et x_i , $i = 1$ à N , un ensemble de valeurs mesurées dans les mêmes conditions. On peut tracer un histogramme de ces valeurs, qui permettra d'apprécier leur dispersion.

On peut aussi faire des moyennes partielles. Par exemple, on groupe les valeurs mesurées par paquet de cinq dont on calcule la moyenne, et l'on trace l'historgramme de ces valeurs moyennes $m_i(5)$ (il y en a environ $N/5$) : on constate alors que les valeurs moyennes sont plus regroupées que les mesures originelles. Si l'on calcule les moyennes de dix valeurs au lieu de cinq, on constate que la dispersion des $m_i(10)$ est à son tour plus petite que celle des $m_i(5)$, etc. Il n'est évidemment besoin d'aucune théorie pour faire ces observations empiriques. Elles donnent à penser que d'une mesure à l'autre les causes de variabilité se compensent, et que par conséquent la moyenne de plusieurs valeurs est « meilleure » (au sens de sa reproductibilité) que le résultat d'une mesure unique.

Il est souhaitable de traiter quantitativement un cas où l'on verra que l'écart type de $m_i(N)$ diminue lorsque N augmente (précisons qu'il faut pour cela réaliser *plusieurs fois* N mesures de la grandeur d'intérêt).

On affirmera qu'il en est toujours ainsi, et que la théorie sera faite au-delà du baccalauréat²⁵.

On affirmera donc que si m est la valeur moyenne de N mesures et s l'écart type de ces N mesures :

$$m = \frac{1}{N} \sum y_i \text{ et } s^2 = \frac{1}{N-1} \sum (y_i - m)^2,$$

l'écart type de la *valeur moyenne* est voisin de s/\sqrt{N} .

Expression du résultat d'un mesurage. Notion d'incertitude

S'il est devenu clair pour l'élève que l'opération de mesure, ou mesurage, est une expérience où la grandeur est modélisée par une variable aléatoire, le résultat de cette opération ne peut simplement s'exprimer par un seul nombre : il est nécessaire de caractériser la dispersion de cette variable aléatoire.

On appelle « incertitude » l'estimation quantitative de la dispersion des mesures.

Dans la pratique, plusieurs cas sont à considérer.

25. L'expérience que constitue une mesure est modélisée par une loi de probabilité P sur l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre (le plus souvent une loi gaussienne). Soit μ la moyenne théorique et σ l'écart type. La loi de probabilité de la moyenne arithmétique m de N mesures est une loi entièrement déterminée par P . Par linéarité de la moyenne, l'espérance de m est μ ; comme les mesures sont indépendantes, la variance de leur somme est la somme des variances, soit $N\sigma^2$; en divisant la somme des mesures par N , on divise la variance par N^2 ; la variance de la moyenne arithmétique est donc σ^2/N et l'écart type, σ/\sqrt{N} . Ces considérations sont hors programme du lycée.

Cas d'un ensemble de mesures uniques : détermination d'incertitudes à partir de la modélisation mathématique d'une relation entre grandeurs

C'est le cas le plus fréquent dans la pratique expérimentale au lycée, où l'on étudie souvent un phénomène qui s'exprime par une relation : angle d'incidence et angle de réfraction, courant électrique et tension, vitesse de chute et temps, etc. On fixe l'une des grandeurs à différentes valeurs et l'on mesure les valeurs correspondantes de l'autre grandeur. Une estimation de l'incertitude sur chaque point ressort de la *comparaison entre les valeurs mesurées et les valeurs correspondantes sur la courbe représentant au mieux les points expérimentaux*. Le cas de la régression linéaire, qui figure dans les calculettes et logiciels scientifiques, est présenté dans l'annexe, où l'on aborde également la procédure de détermination des *incertitudes sur les coefficients* obtenus lors de cette régression.

Cas d'un ensemble de N mesures identiques

Soit m la valeur moyenne des N résultats et s l'écart type. Le résultat de la mesure est présenté sous la forme :

$$\text{Valeur moyenne } m, \text{ incertitude } s/\sqrt{N}.$$

Remarques – Il est important de distinguer l'incertitude sur chacune des mesures individuelles (dont la dispersion est caractérisée par s) de celle portant sur la moyenne.

Il est important également de noter que l'écriture $(m, s/\sqrt{N})$ ne signifie pas que les valeurs déterminées pour la moyenne sont comprises dans l'intervalle $(m - s/\sqrt{N}, m + s/\sqrt{N})$. Des résultats peuvent être en dehors de cet intervalle. La notion d'intervalle de confiance n'étant pas au programme du lycée, nous ne la discuterons pas ici.

Cas d'une grandeur calculée

Soit Y une grandeur fonction connue d'une autre grandeur X : $Y = f(X)$. La grandeur X est mesurée, mais pas la grandeur Y . X est modélisée par une variable aléatoire de valeur moyenne a et d'écart type σ_x . Si l'on connaît la loi de probabilité de X , celle de Y est déterminée. Il est cependant commode de remplacer Y par son approximation $Y \cong f(a) + f'(a)(X - a)$.

Y est donc approximé par une variable aléatoire de valeur moyenne $f(a)$ et d'écart type $\sigma_y = |f'(a)|\sigma_x$.

L'approximation est d'autant meilleure que σ_x/a est petit devant 1.

La grandeur Z peut être une fonction de plusieurs variables. Prenons le cas d'une somme de variables aléatoires indépendantes : $Z = X + Y$.

Dans ce cas, les valeurs moyennes s'ajoutent, ainsi que les variances, qui sont les carrés des écarts types. On a donc $\sigma_Z = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$.

Le cas d'une somme de la forme $Z = \alpha + \beta X + \gamma Y$ s'en déduit immédiatement. On a $\sigma_Z = \sqrt{\beta^2 \sigma_X^2 + \gamma^2 \sigma_Y^2}$.

La généralisation au cas d'une relation quelconque $Z = f(X, Y)$, où les grandeurs X et Y sont mesurées et la grandeur Z est calculée, peut alors être faite. Soient a et b les valeurs moyennes estimées de X et Y . L'incertitude sur Z est donnée par l'expression

$$\sigma_Z = \sqrt{[f'_x(a, b)]^2 \sigma_x^2 + [f'_y(a, b)]^2 \sigma_y^2}$$

où apparaissent les dérivées partielles de f par rapport aux variables X et Y respectivement prises en a et b ²⁶.

26. On remplace la variable aléatoire Z par son approximation obtenue en développant f au voisinage des valeurs moyennes a et b : $Z \cong f(a, b) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} \varepsilon + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} \varepsilon'$, où ε et ε' désignent deux variables aléatoires indépendantes de valeurs moyennes nulles et d'écart type σ_x et σ_y . On se ramène donc à la somme de variables aléatoires.

Ce résultat, non démontré aux élèves, peut être pris pour évaluer l'écart type empirique s_z sur Z à partir des écarts types empiriques s_x et s_y sur X et Y , en remplaçant dans la formule les σ par les s .

Remarque – Cette estimation de l'écart type diffère de ce que l'on obtiendrait en faisant un « calcul d'erreur », lequel conduit à l'expression : $\Delta z = |f'_x(a, b)|\Delta X + |f'_y(a, b)|\Delta Y$.

Chiffres significatifs

Le nombre de chiffres significatifs à donner dans un résultat dépend de l'évaluation de l'incertitude. Ne donner l'incertitude qu'avec un chiffre significatif revient à estimer que cette incertitude n'est estimée qu'à 50 % près. En général, l'incertitude est estimée à quelques pour cents, ce qui signifie qu'on peut la donner avec deux chiffres significatifs. Ceci détermine du même coup le nombre de chiffres significatifs de la grandeur elle-même.

C'est donc l'incertitude sur l'incertitude qui fixe le nombre de chiffres significatifs.

Lors des séances de TP, les appareils couramment utilisés au lycée n'excèdent pas une précision de 1 %, ce qui justifie l'utilisation de deux ou trois chiffres significatifs. Il est important de faire comprendre à l'élève que l'expression d'un résultat dépend des données fournies et nécessite souvent un raisonnement.

N.B. – Le calcul du défaut de masse nucléaire par exemple, ne peut évidemment pas se résoudre à trois chiffres significatifs.

Complément – À propos de la régression linéaire et de la méthode des moindres carrés

La régression linéaire, cas particulier d'une régression par « moindres carrés », contient des conditions sur les incertitudes qu'il convient de respecter si l'on utilise cette méthode dans le cadre d'une détermination expérimentale de valeurs de grandeurs physiques. Dans ce cas, le calcul permet en effet de connaître l'incertitude qui porte sur chacune des mesures portées en ordonnée et de donner les valeurs des deux paramètres avec l'incertitude correspondante.

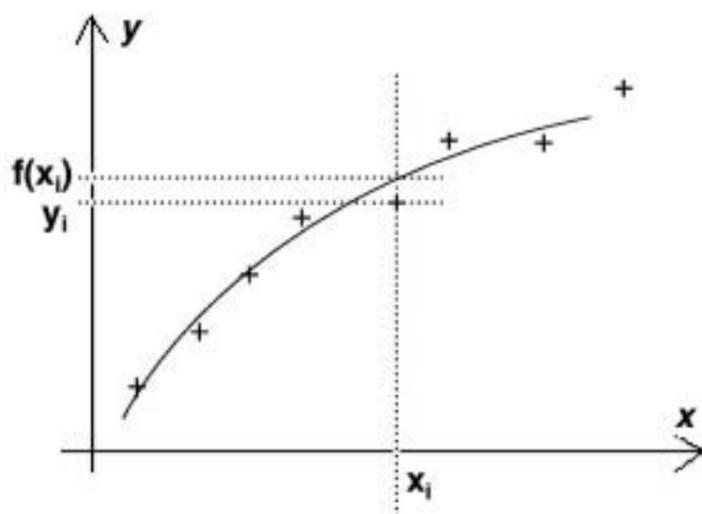
Les éléments théoriques ci-dessous ne constituent pas un ensemble de connaissances à faire acquérir aux élèves. Toutefois, l'usage de la régression linéaire ou de fonctions logicielles d'optimisation par moindres carrés étant répandu dans la pratique, il convient d'indiquer aux élèves le principe de cette détermination en leur donnant l'expression de l'écart quadratique moyen. De là, le raisonnement qualitatif permettant de comprendre les conditions d'utilisation et la prise en compte – de fait – des incertitudes expérimentales, leur est accessible.

Les conditions d'application

Ces conditions proviennent du fondement de la méthode : la minimisation d'un écart quadratique simple. Cherchant à trouver une fonction $y = f(x)$ passant au plus près d'un ensemble de N points (x_i, y_i) , on peut chercher à minimiser l'écart moyen suivant :

$$\frac{1}{N} \sum (y_{i, th} - y_i)^2 \text{ avec } y_{i, th} = f(x_i).$$

L'écart entre le modèle $y = f(x)$ et les mesures est compté selon l'ordonnée : pour chaque valeur x_i , on calcule la différence $y_i - f(x_i)$.



Ce critère simple contient *visiblement* des conditions d'utilisation. En effet, l'expression ne fait intervenir que l'écart compté sur l'axe « des y » ; ceci signifie que l'incertitude considérée n'est que celle qui concerne y soit, en d'autres termes, que *l'incertitude sur la grandeur portée en abscisse est négligeable*. De plus, la sommation considère tous les points de la même manière ; cela signifie que *l'incertitude sur « y » est la même pour tous les points*.

Pour une fonction de la forme $y = a.x + b$, le minimum de l'écart, considéré comme fonction de a et b , se détermine par l'annulation des dérivées partielles puis la résolution du système d'équations ; ceci conduit à des expressions du type :

$$a = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad b = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

L'information sur les incertitudes

La méthode revient à considérer que l'écart résiduel qui reste lorsqu'on a ainsi fait « au mieux » résulte donc de *l'incertitude expérimentale* s_y sur la grandeur portée en ordonnée. Il est clair alors que l'information sur cette incertitude est contenue dans la valeur minimale de l'écart quadratique. On notera que a et b sont des fonctions linéaires des y_i . On peut donc calculer par propagation les estimations s_a et s_b des écarts-types σ_a et σ_b affectant les paramètres a et b (voir plus haut le cas d'une variable aléatoire somme de variables aléatoires indépendantes). Les tableurs donnent d'ailleurs l'ensemble de ces résultats. Ainsi, la commande « DROITEREG » du tableur *Excel* donne-t-elle un résultat « matriciel²⁷ » :

a	b
s_a	s_b
r^2	s_y

Dans le cas présent, le coefficient de corrélation r est voisin de 1.

27. Pour utiliser une formule dite « matricielle », il faut sélectionner la zone d'affectation de 2×3 cellules et valider la fonction DROITEREG() par « Ctrl + Entrée ».

Remarques

- Ces éléments développés à propos de la régression linéaire valent pour toute modélisation par la méthode des moindres carrés simple (non pondérée).
- L'écart entre un point et la courbe théorique n'a, dans le cas général, pas de valeur en soi : c'est sa valeur *rapportée à l'incertitude* du point qui est intéressante, savoir si c'est dans la « norme » ou non... Rappporter l'écart à l'incertitude, c'est-à-dire estimer $(y - f(x))^2/\sigma_y^2$ est donc la méthode à utiliser dans le cas d'incertitudes sur la grandeur portée en ordonnée non constantes.

Quelques repères bibliographiques

- BEAUFILS D. et RICHOUX H., « Régression linéaire et incertitudes expérimentales », *Bulletin de l'Union des physiciens*, n° 796, 1997, p. 1361-1376.
- CORTIAL Y., « À propos de la méthode des moindres carrés », *Bulletin de l'Union des physiciens*, 1990, n° 725.
- CORTIAL Y., « Optimisation de modèles : la prise en compte des incertitudes », in *Les Outils informatiques d'investigation scientifique dans l'enseignement des sciences physiques*, Paris, UdP-INRP, 1995, p. 61-96.
- GIÉ H. et MOREAU R., « Le calcul des incertitudes », *Bulletin de l'Union des physiciens*, n° 691, 1987, p. 159-208.
- SÉRÉ M.-G., « Le déterminisme et le hasard dans la tête des élèves ou de l'utilité du traitement statistique des séries de mesures », *Bulletin de l'Union des physiciens*, n° 740, 1992, p. 87-96.
- TAYLOR J., *Incertaines et analyse des erreurs dans les mesures physiques*, Masson Sciences, 2000.
- TRIGEASSOU J.-C., *Recherche de modèles expérimentaux assistée par ordinateur*, Tec & Doc Lavoisier, 1988.
- VELAY B., « Statistiques appliquées à l'exploitation des mesures », in *Les Outils informatiques d'investigation scientifique dans l'enseignement des sciences physiques*, Paris, UdP-INRP, 1995, p. 99-114.