

Les différentes parties de chaque problème (ainsi que de nombreuses questions au sein de chaque partie) peuvent généralement être traitées de manière indépendante les unes des autres. Il est donc fortement conseillé de lire toutes les questions.

## I- Mécanique : Envoi d'une sonde sur Mars (6 points)

On se propose de faire l'étude de l'envoi d'une sonde sur Mars, le but étant d'utiliser la trajectoire la plus économique. La sonde sera assimilée à un point matériel. Pour simplifier les calculs, on considère que la planète Mars et la Terre décrivent autour du Soleil des trajectoires circulaires respectivement de rayon  $r_M = 23 \times 10^7$  km à la vitesse  $v_M$  de  $24 \text{ km.s}^{-1}$  et de rayon  $r_T = 15 \times 10^7$  km à la vitesse  $v_T$  de  $30 \text{ km.s}^{-1}$ .

Une façon simple d'étudier une trajectoire entre deux planètes est d'admettre qu'il existe autour de chaque planète (ici la Terre puis Mars) une zone d'influence gravitationnelle où la seule attraction gravitationnelle à prendre en compte est celle de la planète.

Dès que la sonde quitte la zone d'influence d'une planète, on considère qu'elle subit uniquement l'attraction gravitationnelle du Soleil.

Données numériques :

- Masse de la planète Mars :  $M_{mars} = 6,4 \times 10^{23}$  kg
- Rayon de la planète Mars :  $R_M = 3,4 \times 10^3$  km
- Masse de la planète Terre :  $M_T = 6,0 \times 10^{24}$  kg
- Rayon de la planète Terre :  $R_T = 6,4 \times 10^3$  km
- Masse du soleil :  $M_S = 1,9 \times 10^{30}$  kg
- Masse de la sonde :  $m = 30 \times 10^6$  kg
- Constante de gravitation universelle :  $G = 6,7 \times 10^{-11}$  SI

### 1. Mouvement de la sonde autour de la terre

Pour cette étude on se placera dans le référentiel géocentrique supposé galiléen.

On ne tiendra compte que de l'attraction de la Terre.

On place la sonde sur une orbite d'attente circulaire basse au voisinage de la Terre. La sonde décrit alors une trajectoire circulaire de rayon  $r_0$  à la vitesse  $v_0$ , de centre le centre de la Terre. Sur cette trajectoire la sonde se trouve à une altitude  $z_0$  de 200 km au-dessus du sol terrestre.

1.1 Exprimer la vitesse  $v_0$  qu'a la sonde sur cette orbite en fonction de  $G$ ,  $M_T$  et  $r_0$  puis la calculer numériquement.

1.2 En déduire l'expression de l'énergie cinétique  $E_{c0}$  de la sonde en fonction de  $G$ ,  $M_T$ ,  $m$  et  $r_0$ .

1.3 Etablir l'expression de l'énergie potentielle de gravitation  $E_{p0}$  en fonction de  $m$ ,  $M_T$ ,  $G$  et  $r_0$ . On prendra une énergie potentielle nulle lorsque la sonde est infiniment éloignée de la Terre. En déduire une relation entre  $E_{p0}$  et  $E_{c0}$ .

1.4 Exprimer l'énergie mécanique totale  $E_{m0}$  en fonction de  $E_{c0}$ . En faire l'application numérique. Commenter le signe de  $E_{m0}$ .

### 2. Sortie de l'attraction terrestre

A partir de cette orbite d'attente au voisinage de la Terre on désire envoyer la sonde sur Mars.

- 2.1 Exprimer le travail minimal à fournir à la sonde en orbite autour de la Terre pour qu'elle puisse s'échapper de l'attraction terrestre.
- 2.2 Exprimer alors la nouvelle vitesse  $v'_0$  de la sonde juste après avoir reçu ce travail, et avant d'avoir quitté l'orbite basse. Effectuer l'application numérique.
- 2.3 Décrire la trajectoire de la sonde après qu'elle a quitté l'orbite circulaire.
- 2.4 Décrire la trajectoire qu'aurait la sonde si le travail fourni était supérieur au travail minimal établi dans la question 2.1.
- 2.5 On communique à la sonde une vitesse  $v_I$  par rapport à la Terre supérieure ou égale à la vitesse  $v'_0$ . La sonde échappe à l'attraction terrestre et possède alors une vitesse  $v_2$  par rapport à la Terre. Exprimer  $v_I$  en fonction de  $v_2$ ,  $G$ ,  $M_T$  et  $r_0$ .

### 3. Ellipse de transfert de Hohmann

La sonde échappe donc à l'attraction terrestre et devient un satellite du Soleil. Une fois éloignée de la Terre elle possède une vitesse  $v_2$  dans le référentiel géocentrique et  $v_3$  dans le référentiel héliocentrique.

On souhaite que sa trajectoire autour du Soleil rencontre celle de Mars.

Pour cela la sonde doit décrire une ellipse dont le Soleil est un foyer ; cette ellipse est coplanaire aux trajectoires circulaires de la Terre et de Mars autour du Soleil. Elle est tangente en son périhélie à la trajectoire de la Terre autour du Soleil et en son aphélie à la trajectoire de Mars autour du Soleil.

On indique que le sens de révolution de la sonde autour du Soleil sera identique à celui de la Terre et de Mars autour du Soleil.

Pour cette étude on se place dans le référentiel héliocentrique ( $R_S$ ) supposé galiléen et on **ne tient compte que de l'attraction gravitationnelle du Soleil**.

- 3.1 Réaliser un schéma de la trajectoire de la sonde autour du Soleil et y faire figurer les trajectoires de la Terre et de Mars autour du Soleil.  
Calculer le demi-grand axe, noté  $a$  de la trajectoire elliptique de la sonde.  
Remarque : on pourra négliger  $r_0$  devant  $r_T$ .
- 3.2 Etude des propriétés de la trajectoire
- 3.2.1 La seule force qui s'exerce sur la sonde est une force dite *centrale*, justifier l'appellation.
- 3.2.2 Enoncer la loi des aires.
- 3.2.3 Evaluer le temps de vol entre la Terre et Mars. On pourra utiliser la troisième loi de Kepler.
- 3.3 Sur la trajectoire elliptique l'énergie mécanique de la sonde est constante et vaut :  
$$E_m = \frac{-G m M_S}{2a}$$
. Pour se placer sur cette trajectoire elliptique, la sonde doit avoir une vitesse  $v_3$  dans le référentiel héliocentrique après sa sortie de l'attraction terrestre (au périhélie de l'ellipse de transfert).
- 3.3.1 Exprimer cette vitesse en fonction de  $r_T$ ,  $r_M$ ,  $G$  et  $M_S$ . En faire l'application numérique.

3.3.2 En déduire la valeur de la vitesse  $v_2$  correspondante de la sonde par rapport au référentiel géocentrique lié à la Terre à cet instant.

3.4 Evaluer la valeur de la vitesse  $v_4$  de la sonde par rapport au Soleil lors de son arrivée au voisinage de Mars (à l'aphélie de l'ellipse de transfert).

#### 4. Trajectoire autour de Mars

Pour cette étude on se placera dans le référentiel ( $R_{\text{Mars}}$ ) supposé galiléen, centré sur Mars et en translation par rapport à ( $R_S$ ).

On ne tient compte dans cette phase que de la gravitation martienne.

4.1 Utiliser la question 3.4 pour calculer la vitesse  $v_5$  de la sonde par rapport à la planète Mars à son arrivée au voisinage de Mars.

4.2 Lorsque la sonde rentre dans le champ d'attraction de Mars, on peut considérer que la sonde par rapport à Mars vient de l'infini ; en déduire sa trajectoire par rapport à Mars.

4.3 L'objectif est de mettre la sonde sur une orbite circulaire de rayon  $r_6$  autour de Mars correspondant à une altitude  $z_M$  de 100 km ; il faut donc réaliser un freinage de la sonde. Exprimer la vitesse  $v_6$  que doit posséder la sonde par rapport à Mars sur cette orbite circulaire en fonction de  $G$ ,  $M_{\text{mars}}$  et  $r_6$ . Calculer  $v_6$ .

4.4 Evaluer le travail exercé par les rétrofusées pour réaliser le changement d'orbite de la sonde.

## II- Electricité : Moteur électrique (7 points)

Les bobines sont les éléments fixes essentiels des stators des moteurs électriques.

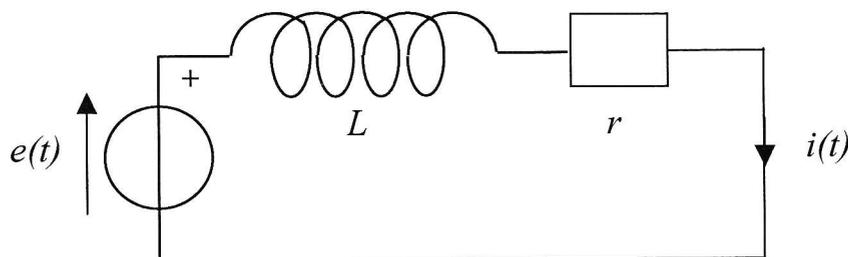
Par exemple, les trains TGV ont des moteurs triphasés de puissance égale à environ 1 000 kW.

### A. Etude des bobines

Nous allons étudier les caractéristiques d'une des bobines du moteur triphasé, pouvant être modélisée par une bobine idéale d'inductance  $L$  en série avec un conducteur ohmique de résistance  $r$ .

#### 1. Réponse à un échelon de tension

1.1 On alimente la bobine par un générateur idéal de tension  $e(t)$  délivrant un échelon de tension. A  $t = 0$ ,  $e(t)$  passe brutalement de 0 volt à  $E$ .

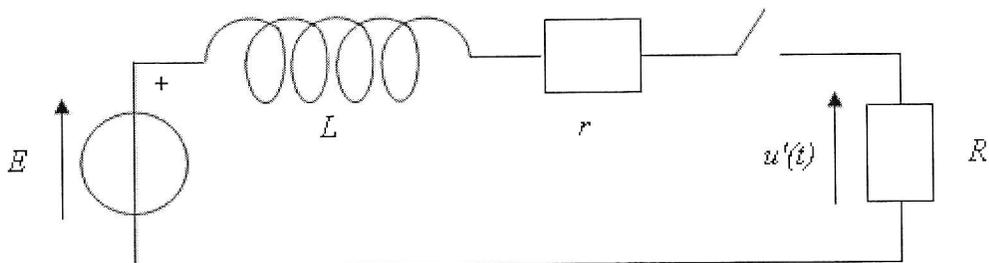


1.1.1 Etablir l'équation différentielle qui régit l'évolution de l'intensité instantanée  $i(t)$  en fonction de  $E$ ,  $r$ ,  $L$  et  $t$ .

1.1.2 Etablir l'expression du portrait de phase  $\frac{di}{dt} = f(i)$ .

1.1.3 Tracer l'allure du portrait de phase  $\frac{di}{dt} = f(i)$  en précisant les points particuliers permettant d'évaluer  $r$  et  $L$  connaissant la valeur de  $E$ .

1.2 On considère à présent le circuit ci-dessous,  $R$  étant la résistance d'un conducteur ohmique et  $E$  la force électromotrice d'un générateur idéal de tension continue. Le circuit étant ouvert, on ferme l'interrupteur à l'instant  $t = 0$ .



1.2.1 Indiquer brièvement le mode opératoire permettant de visualiser la réponse  $u'(t)$  sur un oscilloscope.

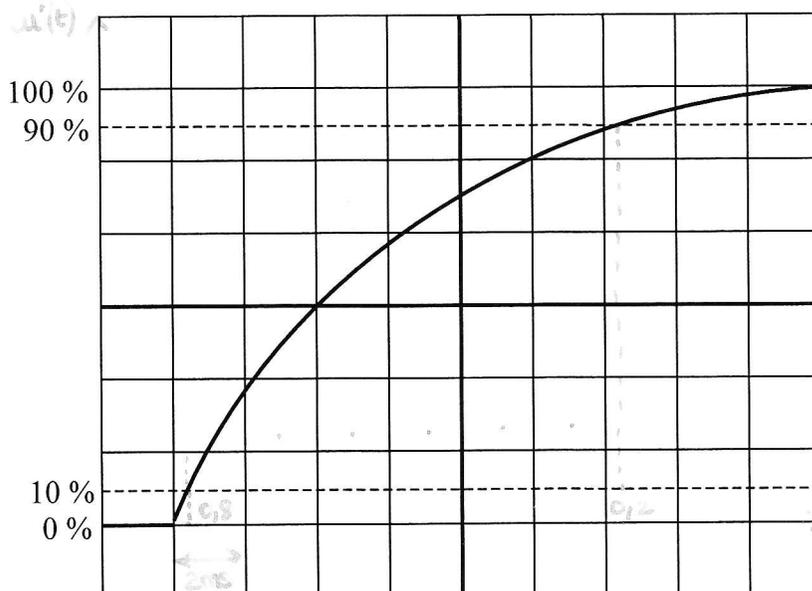
1.2.2 On pose  $\tau = \frac{L}{R+r}$ . Etablir la loi horaire de la tension  $u'(t)$  en fonction de  $E, R, r, \tau$  et  $t$ .

1.2.3 Indiquer la dimension et le sens physique de la grandeur  $\tau$ .

On définit le temps de montée  $t_m$  comme le temps que met la tension  $u'(t)$  pour passer de 10% à 90% de sa valeur en régime permanent.

1.2.4 Montrer que  $t_m = \tau \ln 9$ .

On relève la courbe  $u'(t)$  suivante :



**Calibres : décalibrée en division verticale  
2 ms par division horizontale**

- 1.2.5 Déduire de ce relevé la valeur de la constante de temps du circuit par la méthode du temps de montée.
- 1.2.6 La mesure de la tension maximale atteinte par  $u'(t)$  donne 6,94 V. En déduire la valeur de la résistance  $r$  et de l'inductance  $L$  de la bobine sachant que le circuit a été alimenté sous une tension  $E = 10,0$  V et que la résistance  $R$  vaut  $100 \Omega$ .
- 1.2.7 Une fois le régime permanent atteint, un opérateur décide d'ouvrir l'interrupteur. Il s'agit d'un interrupteur mécanique et on observe une petite étincelle à l'ouverture. Proposer une explication à ce phénomène.

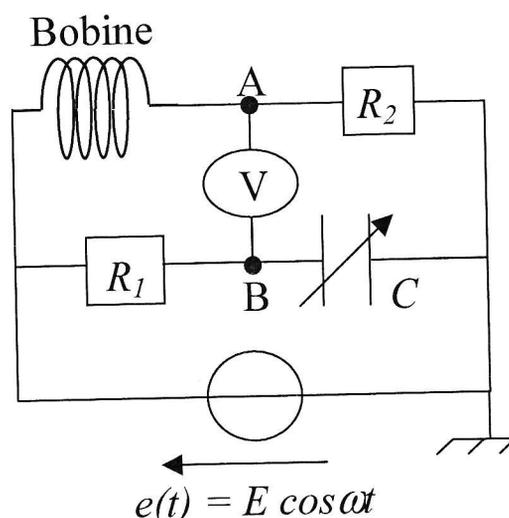
## 2. Réponse en régime sinusoïdal forcé

On alimente une bobine réelle par un courant sinusoïdal de pulsation  $\omega$  d'intensité efficace  $I$  sous la tension efficace  $U$ . On observe à l'oscilloscope le déphasage noté  $\varphi$  de  $u(t)$ , tension aux bornes de la bobine réelle (de caractéristiques  $L$  et  $r$ ), par rapport à  $i(t)$ .

- 2.1 Représenter le montage permettant de visualiser à l'oscilloscope  $u(t)$  et  $i(t)$  (ou une courbe proportionnelle à  $i(t)$ ). Indiquer une méthode permettant la mesure du déphasage  $\varphi$  sur l'écran de l'oscilloscope.
- 2.2 Exprimer la puissance moyenne notée  $P$  algébriquement reçue par la bobine réelle, en fonction de  $U$ ,  $I$  et  $\varphi$  en partant de l'expression de la puissance instantanée  $p(t)$ .
- 2.3 Etablir l'expression  $P = rI^2$ , où  $r$  est la résistance interne de la bobine.
- 2.4 Etablir l'expression  $L = \frac{P \tan \varphi}{\omega I^2}$ .
- 2.5 Sachant que  $P = 1,00$  MW,  $I = 150$  A,  $\varphi = 80,0^\circ$  et que la fréquence du signal délivré par le générateur est  $f = 50,0$  Hz, calculer les valeurs de  $r$  et de  $L$ .

## 3. Etude par pont de Wheatstone.

On considère le montage ci-dessous où  $R_1$  et  $R_2$  sont des conducteurs ohmiques et  $C$  un condensateur de capacité variable. Le générateur idéal délivre une tension sinusoïdale qui a pour expression :  $e(t) = E \cos \omega t$ , de pulsation  $\omega$ . Entre les points A et B, on place un voltmètre de précision dont l'impédance d'entrée est suffisamment grande pour supposer qu'aucun courant ne le traverse.



- 3.1 Dans un premier temps, on néglige la résistance interne de la bobine. Exprimer l'amplitude complexe de la différence de potentiel complexe ( $\underline{V}_A - \underline{V}_B$ ) en fonction de  $E, R_1, R_2, C, L$  et  $j\omega$ .
- 3.2 Dédurre, dans ce cas, la relation permettant d'obtenir la valeur de l'inductance  $L$  en fonction de  $R_1, R_2$  et  $C$  lorsque cette différence est nulle (on dit que le pont est équilibré).
- 3.3 En pratique, avec un tel dispositif, le pont n'est jamais véritablement équilibré. La cause en est la résistance du bobinage, négligée jusqu'alors et dont on va tenir compte dans cette question. On place, en parallèle avec le condensateur variable  $C$ , une résistance variable  $R$ . Déterminer, dans ces conditions, la nouvelle expression de l'amplitude complexe de la différence de potentiel complexe ( $\underline{V}_A - \underline{V}_B$ ), en fonction de  $E, r, R, R_1, R_2, C, L$  et  $j\omega$ .
- 3.4 Après avoir correctement ajusté les valeurs de  $C$  et  $R$ , on aboutit à un équilibre parfait du pont, quelle que soit la fréquence. Déterminer les valeurs de l'inductance  $L$  et de la résistance  $r$  du bobinage si  $R_1 = R_2 = 1,00 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 800 \text{ nF}$  et  $R = 22,7 \text{ k}\Omega$ .
- 3.5 Les résultats ainsi obtenus l'ont été pour une fréquence  $f = 50 \text{ Hz}$ . On constate expérimentalement que lorsque la fréquence augmente, le pont se déséquilibre légèrement et qu'il faut réajuster la valeur de la résistance variable  $R$ , en la diminuant, pour atteindre à nouveau l'équilibre. Proposer une interprétation physique de ce phénomène.

## B. Principe de fonctionnement du moteur

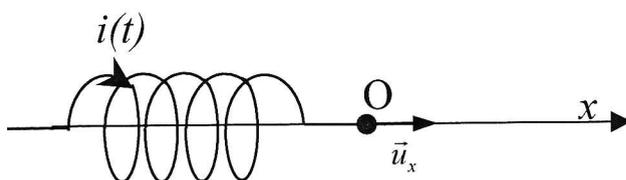
Une alimentation triphasée est caractérisée par trois tensions sinusoïdales de même valeur efficace  $U$ , de même fréquence  $f$ , mais déphasées chacune de  $120^\circ$  par rapport à l'autre.

On les notera  $u_1(t), u_2(t)$  et  $u_3(t)$ , telles que :  $u_1(t) = U\sqrt{2} \cos 2\pi ft$

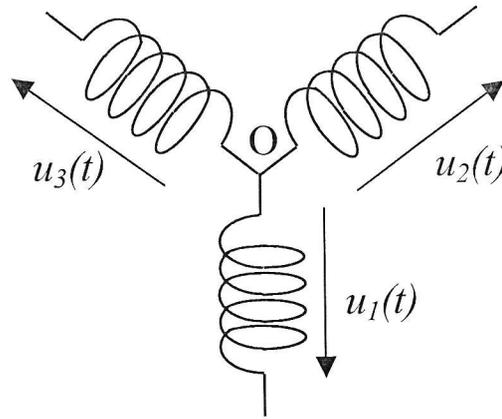
$$u_2(t) = U\sqrt{2} \cos(2\pi ft - \frac{2\pi}{3})$$

$$u_3(t) = U\sqrt{2} \cos(2\pi ft + \frac{2\pi}{3})$$

1. Représenter l'aspect des trois courbes  $u_1(t), u_2(t)$  et  $u_3(t)$ , en les positionnant sur un même graphe horaire.
2. On considère une bobine, d'axe de révolution  $Ox$ , parcourue par un courant  $i(t)$ . Montrer, par des considérations de symétrie que le champ magnétique créé par cette bobine en  $O$ , point appartenant à l'axe  $Ox$ , est selon cet axe, soit :  $\vec{B}(O) = B(O) \vec{u}_x$ .



3. Trois bobines identiques sont positionnées dans un même plan avec leur axe situé à  $120^\circ$  l'une de l'autre. Elles constituent le stator d'un moteur de TGV. Le point commun  $O$ , qui relie les trois bobinages, est situé à égale distance de chaque bobine. On alimente chaque bobine par l'une des trois tensions triphasées.



On note  $B_1(t)$ ,  $B_2(t)$  et  $B_3(t)$  les intensités des champs magnétiques créés en O respectivement par  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  et  $u_3(t)$ .

On écrira :  $B_1(t) = B_0 \cos 2\pi ft$

$$B_2(t) = B_0 \cos\left(2\pi ft - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$B_3(t) = B_0 \cos\left(2\pi ft + \frac{2\pi}{3}\right)$$

On admet que le système des 3 bobines crée en O un champ résultant constitué de la somme des trois champs associés à chacune des bobines.

3.1 Montrer que ce champ résultant est un champ  $\vec{B}$  tournant à la fréquence des tensions sinusoïdales.

3.2 En déterminer l'intensité en fonction de  $B_0$ .

4. Expliquer succinctement comment un rotor conducteur peut se mettre à tourner sous l'action de ce champ tournant en faisant appel à des connaissances sur les phénomènes d'induction.

### III- Thermodynamique : Etude d'un procédé de lyophilisation (7 points)

On s'intéresse dans ce problème à quelques aspects de l'étude d'un procédé de lyophilisation.

La lyophilisation est une opération de déshydratation à basse température, couramment utilisée dans les industries pharmaceutiques et alimentaires pour la conservation de produits à forte valeur ajoutée. Elle met en jeu différents changements d'état de l'eau permettant d'éliminer cette dernière sans altérer le produit ainsi séché.

La première partie du problème s'intéresse au groupe frigorifique utilisé par le lyophilisateur ; la seconde partie concerne l'étude qualitative puis quantitative des diagrammes de changement d'état de l'eau, tandis que la dernière partie traite le procédé de lyophilisation en lui-même.

#### Données :

- On supposera que la vapeur d'eau se comporte comme un gaz parfait et les phases condensées comme des corps incompressibles et non dilatables de capacité thermique constante.
- Pression atmosphérique  $P_0 = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$ .
- Constante des gaz parfaits  $R = 8,314 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$

- **Eau :**

- Masse molaire de l'eau :  $M_{eau} = 18,0 \text{ g.mol}^{-1}$
- Coordonnées respectives des points triple et critique de l'eau dans un diagramme  $(P,T)$  :  
(610,5 Pa ; 273,16 K) et  $(221,1 \times 10^5 \text{ Pa} ; 647,3 \text{ K})$ .
- Pression de vapeur saturante de l'eau à  $T_{eb} = 373 \text{ K}$  :  $P_{sat}(373 \text{ K}) = P_0 = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$
- Pression d'équilibre liquide-solide pour l'eau à  $T_{fus} = 273 \text{ K}$  :  $P_{LS}(273 \text{ K}) = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$
- Pression d'équilibre solide-gaz à  $T_5 = 234 \text{ K}$  :  $P^*(T_5) = 13,3 \text{ Pa}$
- Enthalpie de fusion de l'eau à  $T_{fus} = 273 \text{ K}$  :  $L_{fus}(273 \text{ K}) = 334 \text{ kJ.kg}^{-1}$
- Capacité thermique massique de l'eau liquide :  $c_{L,eau} = 4,18 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$
- Capacité thermique massique de l'eau solide :  $c_{S,eau} = 2,10 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$

- **Produit à lyophiliser et chambre de lyophilisation**

- Masse du produit à lyophiliser avant traitement (produit humide) :  $m_{produit} = 2,00 \text{ kg}$
- Capacité thermique massique du produit sec (vidé de toute eau) :  $c_{prod-sec} = 0,463 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- Capacité thermique globale de la chambre de lyophilisation (parois, serpents, plateaux) :  
 $C_{hyo} = 3,97 \text{ kJ.K}^{-1}$

## 1. Etude du groupe frigorifique

Supposons que le groupe frigorifique assurant le refroidissement des fluides caloporteurs fonctionne de manière réversible entre deux sources de chaleur, une source froide à la température  $T_F$  et une source chaude à la température  $T_C$  ( $T_C > T_F$ ).

Le fluide frigorifique subit le cycle de transformations suivant, dit cycle de Carnot :

- Détente isotherme réversible de l'état A (température  $T_A = T_F$ , pression  $P_A$ ) à l'état B (pression  $P_B$ ).
- Compression isentropique de l'état B à l'état C (température  $T_C$ , pression  $P_C$ ).
- Compression isotherme réversible de l'état C à l'état D (pression  $P_D$ ).
- Détente isentropique de l'état D à l'état A.

1.1 Les groupes frigorifiques sont-ils des machines thermiques fonctionnant en mode moteur ou récepteur ?

L'efficacité d'une machine frigorifique est définie de la manière suivante :  $e_F = \frac{Q_F}{W}$ ,  $Q_F$  étant le transfert thermique algébriquement reçu par la machine de la source froide et  $W$  le travail algébriquement reçu.

1.2 Justifier cette définition et donner les signes de  $W$  et  $Q_F$ .

1.3 En appliquant le premier et le second principe de la thermodynamique, exprimer l'efficacité de Carnot  $e_{F,carnot}$  en fonction uniquement des températures des sources chaude et froide.

1.4 On donne  $T_F = 223 \text{ K}$  et  $T_C = 289 \text{ K}$ . Calculer la valeur de  $e_{F,carnot}$ . Commenter ce résultat.

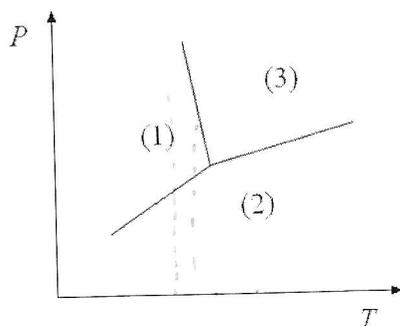
1.5 Considérons un groupe frigorifique fonctionnant selon un cycle réel.

1.5.1 Comparer qualitativement son efficacité à celle de Carnot établie précédemment.

1.5.2 Donner un exemple concret de phénomène pouvant être responsable de cet écart.

## 2. Diagrammes de changement d'état de l'eau

2.1 On donne ci-dessous la représentation **schématique** du diagramme d'état de l'eau en coordonnées  $(P,T)$  :



Reproduire ce diagramme et indiquer la ou les phases correspondant à chacun des trois domaines (1), (2) et (3). Nommer les trois courbes représentées et placer les points triple et critique respectivement notés **T** et **C**.

**2.2** Considérons la transformation d'une masse  $m$  d'eau de l'état G ( $T_G = 373$  K, eau liquide avec la présence de la première bulle d'eau vapeur) à l'état H ( $T_H = T_G = 373$  K, eau à l'état de gaz avec la présence de la dernière goutte d'eau liquide). Que valent les pressions  $P_G$  et  $P_H$  respectivement en G et H ? Positionner les points G et H et représenter cette transformation dans les diagrammes d'état de l'eau en coordonnées  $(P, T)$  et  $(P, V)$ .

**2.3** Pour tout changement d'état de l'eau tel que celui de la phase 1 à la phase 2, noté  $1 \rightarrow 2$ , la relation de Clapeyron exprime le lien entre le coefficient directeur  $\left(\frac{dP_{\text{éq}}}{dT}\right)$  de la tangente en un point de la courbe de changement d'état dans le diagramme  $(P, T)$ , l'enthalpie massique (ou chaleur latente massique) de changement d'état  $L_{1 \rightarrow 2}(T)$ , la température  $T$  et la différence des volumes massiques  $u_1(T)$  et  $u_2(T)$  de l'eau, respectivement pour les phases (1) et

$$(2) : L_{1 \rightarrow 2} = T(u_2 - u_1) \left(\frac{dP_{\text{éq}}}{dT}\right).$$

**2.3.1** A l'aide de cette relation de Clapeyron, expliquer pourquoi la pente de la courbe de fusion de l'eau dans le diagramme  $(P, T)$  est négative.

**2.3.2** Décrire la transformation ayant lieu lorsqu'on exerce une surpression isotherme sur de l'eau solide à  $T_{\text{fus}} = 273$  K initialement à pression atmosphérique  $P_0$ .

## 2.4 Courbe de sublimation

**2.4.1** En supposant que la vapeur d'eau se comporte comme un gaz parfait, exprimer son volume massique  $u$  à la température  $T$  et à la pression  $P$  en fonction de  $T$ , de  $P$ , de la constante  $R$  des gaz parfaits et de la masse molaire  $M_{\text{eau}}$  de l'eau.

**2.4.2** Justifier que le volume massique de l'eau solide est négligeable devant celui de l'eau vapeur.

**2.4.3** En utilisant la relation de Clapeyron, et les hypothèses des questions **2.4.1** et **2.4.2**, donner l'expression de la pente de la tangente à la courbe de sublimation dans le diagramme  $(P, T)$  en fonction de  $L_{\text{sub}}(T)$ ,  $R$ ,  $T$ ,  $P_{\text{éq}}$  et  $M_{\text{eau}}$  (masse molaire de l'eau).

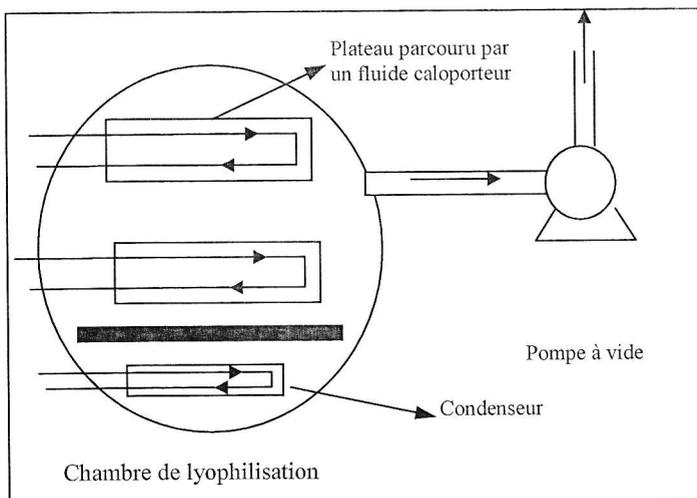
**2.4.4** En supposant que l'enthalpie de sublimation est constante, montrer que la courbe de sublimation est, dans le diagramme  $(P, T)$ , une exponentielle décroissante en  $1/T$ .

### 3. Etude d'un procédé de lyophilisation

Le lyophilisateur étudié est constitué d'une chambre de lyophilisation reliée à une pompe à vide, ainsi que d'un groupe frigorifique et d'une source chauffante.

La chambre de lyophilisation contient des plateaux destinés à recevoir les produits à traiter.

Ces plateaux peuvent être refroidis ou chauffés grâce à un fluide caloporteur entrant à la température  $T_S$  circulant au sein de chaque plateau.



La chambre contient également un condenseur constitué d'un serpentin dans lequel peut circuler un fluide caloporteur à la température  $T_6 = 203$  K, éloigné des plateaux.

On supposera pour simplifier l'étude du problème que **l'eau contenue dans le produit à lyophiliser a le même comportement que l'eau pure**, et que **la matière du produit autre que l'eau est sous forme solide et ne subit pas de changements d'état**.

On supposera également que l'eau sous forme vapeur a un comportement de gaz parfait et que tous les liquides et les solides se comportent comme des phases condensées incompressibles.

On supposera enfin que **le produit à lyophiliser étudié est le café, qui contient 86,0 % en masse d'eau susceptible de subir des changements d'état**.

*Données :*

Lors de la lyophilisation on peut identifier les transformations suivantes, sachant qu'initialement, le produit est dans l'état 1,  $P_1 = 1,013 \times 10^5$  Pa et  $T_1 = 293$  K :

- Transformation 1-2 : Refroidissement isobare de l'état 1 à l'état 2 ( $P_2$ ;  $T_2 = 233$  K).
- Transformation 2-3 : Mise sous vide isotherme de l'état 2 à l'état 3 ( $P_3 = 13,3$  Pa ;  $T_3$ ).
- Transformation 3-4 : Réchauffement isobare de l'état 3 à l'état 4 ( $P_4$ ;  $T_4 = 293$  K).

**3.1** Représenter ces différentes transformations sur le diagramme d'état de l'eau en coordonnées  $(P, T)$ , en précisant pour chaque état 1, 2, 3 et 4 l'état physique sous lequel se trouve l'eau contenue dans le produit à lyophiliser.

Etude de la transformation 1 – 2.

**3.2** La transformation 1-2 peut avoir lieu au sein même de la chambre de lyophilisation, de capacité calorifique globale  $C_{lyo}$ . Il y a au cours de cette transformation un transfert thermique  $Q$  au niveau des plateaux, et on considère qu'en dehors de ce transfert, la chambre de lyophilisation est parfaitement calorifugée.

**3.2.1** Donner l'expression littérale du transfert thermique  $Q_1$  ayant lieu lors du refroidissement isobare de l'ensemble {chambre de lyophilisation + masse  $m_{produit}$  du produit à lyophiliser (produit humide)} de  $T_1$  à  $T_{fus}$  (température de fusion de l'eau à  $P_1$ ), l'eau restant sous forme liquide.  $Q_1$  sera exprimé en fonction de  $m_{produit}$ ,  $c_{L,eau}$ ,  $c_{prod-sec}$ ,  $C_{lyo}$ ,  $T_1$  et  $T_{fus}$ .

- 3.2.2 Donner l'expression littérale du transfert thermique  $Q_2$  ayant lieu lors de la solidification à pression atmosphérique d'une masse  $m$  d'eau (température initiale = température finale =  $T_{fus} = 273$  K) en fonction de l'enthalpie massique de fusion de l'eau  $L_{fus}(273$  K).
- 3.2.3 Donner l'expression littérale du transfert thermique total  $Q$  ayant lieu lors de la transformation 1-2 pour l'ensemble {masse  $m_{produit}$  de produit humide ; chambre de lyophilisation}. Calculer sa valeur numérique.
- 3.3 Le transfert thermique  $Q$  étudié dans la question 3.2 a lieu grâce à la circulation d'un fluide caloporteur dans les serpentins parcourant les plateaux. Ce fluide caloporteur est un liquide de capacité thermique  $c_{calo} = 1,67$  J.K<sup>-1</sup>.g<sup>-1</sup> circulant avec un débit massique constant  $D = 4,00$  g.s<sup>-1</sup>. Le liquide commence à circuler dans la chambre de lyophilisation à l'instant  $t = 0$  ; durant toute la durée de la transformation 1-2, il entre dans la chambre de lyophilisation à la température constante  $T_S = 223$  K et en ressort en ayant été réchauffé à la température  $T(t)$  de la chambre de lyophilisation contenant la masse  $m_{produit}$  de produit humide. L'ensemble reste à pression atmosphérique, et l'état initial du système correspond à l'état 1. Ainsi, la température  $T(t)$  variera au cours de la transformation de  $T(t = 0) = T_1$  à  $T(t_F) = T_2$ .

**Dans toute cette partie, on s'intéresse à une masse élémentaire de liquide caloporteur traversant la chambre de lyophilisation pendant le temps  $dt$ , durée au cours de laquelle la température de la chambre et du produit varie de  $dT$ .**

- 3.3.1 En effectuant un bilan enthalpique, établir l'équation différentielle  $dt = -\frac{C}{D c_{calo}} \frac{dT}{T(t) - T_S}$  vérifiée entre les instants  $t = 0$  et  $t_1$ , avec  $t_1$  l'instant où l'eau contenue dans le produit commence à subir un changement d'état, et  $C = 0,860 m_{produit} c_{L,eau} + 0,140 m_{produit} c_{prod-sec} + C_{lyo}$ . En déduire la relation donnant la température  $T(t)$  de la chambre de lyophilisation et du produit en fonction du temps  $t$ , pour  $t$  compris entre  $t = 0$  et  $t = t_1$ .
- 3.3.2 Calculer la valeur numérique de ce temps  $t_1$ .
- 3.3.3 Soit  $t_2$  l'instant où l'eau finit de subir le changement d'état commencé à  $t_1$ . Etablir pour  $t$  compris entre  $t_1$  et  $t_2$  la relation entre la température  $T(t) = T_{fus} = 273$  K de la chambre de lyophilisation,  $T_S$ ,  $D$ ,  $L_{fus}$ ,  $c_{calo}$ , les temps  $t_1$  et  $t$  et la masse d'eau  $m_{sol}(t)$  ayant congelé à cet instant  $t$ .
- 3.3.4 Calculer la valeur numérique de ce temps  $t_2$ .
- 3.3.5 Etablir la relation donnant la température  $T(t)$  de la chambre de lyophilisation et du produit en fonction du temps  $t$ , pour  $t_2 < t < t_3$ , avec  $t_3 = t_F$ ,  $t_F$  étant l'instant précédemment défini où la température du produit atteint la valeur  $T_2 = 233$  K.
- 3.3.6 Calculer le temps  $t_3 = t_F$  nécessaire pour que la température du produit atteigne la température  $T_2 = 233$  K.
- 3.4 Etude de la transformation 3-4 :
- 3.4.1 Donner l'expression littérale du volume occupé par une masse  $m = 1$  kg d'eau dans l'état 4 (température  $T_4$ , pression  $P_4$ ). Effectuer l'application numérique.
- 3.4.2 Ce volume suscitant des problèmes techniques, on fait circuler un fluide caloporteur à  $T_6 = 203$  K dans le serpentin du condenseur. Cette température permet-elle d'assurer la condensation de l'eau vapeur en contact avec le condenseur ?
- 3.5 Au vu de ce procédé, citer les raisons pour lesquelles la lyophilisation est réservée aux produits de forte valeur ajoutée.