

SESSION 2010

**CAPES
CONCOURS INTERNE
ET CAER**

Section : PHYSIQUE ET CHIMIE

ÉPREUVE DE PHYSIQUE ET CHIMIE

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : *Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.*

Tournez la page S.V.P.

Première partie : CHIMIE

Ce problème traite de quelques aspects de la chimie de l'azote ; les différentes parties sont indépendantes.

A. Architecture de la matière

- A.1. Donner la structure électronique de l'élément azote N de numéro atomique $Z = 7$.
- A.2. Dans tous les composés envisagés, l'atome d'azote est l'élément central. Indiquer la structure de Lewis pour chacune des espèces suivantes en précisant les charges formelles portées par les atomes : NH_3 ; NH_4^+ ; NO_2 .
- A.3. Quelle particularité électronique présente la molécule NO_2 ? En déduire le schéma de Lewis de N_2O_4 .
- A.4. Rappeler le principe de la théorie VSEPR et en déduire la géométrie de NH_3 et celle de l'ion NH_4^+ .

B. L'ammoniac en solution aqueuse

On se place à la température de 298 K.

Espèce ionique	H_3O^+	$\text{HO}^-_{(\text{aq})}$	$\text{NH}_4^+_{(\text{aq})}$	$\text{Cl}^-_{(\text{aq})}$
λ° en $\text{S.m}^2.\text{mol}^{-1}$ à 298 K	$3,5 \times 10^{-2}$	$2,0 \times 10^{-2}$	$0,74 \times 10^{-2}$	$0,76 \times 10^{-2}$

- B.1. On étudie une solution d'ammoniac.
Ecrire l'équation de la réaction de l'ammoniac avec l'eau.
La solution est-elle acide ou basique ici ?
- B.2. On mesure la conductivité de cette solution de concentration $c = 8,0 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$ et l'on trouve $\sigma = 2,87 \times 10^{-3} \text{ S.m}^{-1}$.
- B.2.1. Rappeler le principe de mesure de la conductivité par un conductimètre. Est-il nécessaire d'étalonner cet appareil ?
- B.2.2. Donner l'expression générale de la conductivité σ de la solution en introduisant les conductivités molaires ioniques à dilution infinie λ° des différents ions à 298 K.
- B.2.3. D'après la question B.1, quelle approximation peut-on faire ?
En déduire la valeur du coefficient de dissociation α de NH_3 ainsi que la valeur du pH de la solution.
- B.2.4. Calculer le pKa du couple $\text{NH}_4^+_{(\text{aq})} / \text{NH}_3_{(\text{aq})}$.
- B.3. On veut maintenant doser une solution d'ammoniac de concentration inconnue c_B par une solution d'acide chlorhydrique de concentration $c_A = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$.
- B.3.1. Pour réaliser le dosage, on prélève un volume $V_B = 10,0 \text{ mL}$ de la solution d'ammoniac et on ajoute 90,0 mL d'eau.

Justifier l'apport d'une grande quantité d'eau lors d'un dosage conductimétrique.

B.3.2. Ecrire l'équation de la réaction de ce dosage (elle sera supposée totale).

B.3.3. Quelle est l'allure de la courbe donnant la conductivité de la solution $\sigma = f(v)$ où v est le volume d'acide chlorhydrique versé ? (on introduira le volume équivalent d'acide chlorhydrique v_E).

Faire un raisonnement qualitatif pour décrire les 2 parties de la courbe ($v < v_E$ et $v > v_E$) et justifier le changement de pente.

B.3.4. On mesure $v_E = 8,9$ mL. En déduire c_B .

C. Oxydo-réduction

Données : potentiels standards d'oxydo-réduction à 298 K et à pH = 0 :

$$E^\circ(\text{NO}_3^-/\text{NO}_2) = 0,83 \text{ V}$$

$$E^\circ(\text{NO}_2/\text{NO}) = 0,85 \text{ V}$$

$2,3 \text{ RT/F} = 0,06 \text{ V}$ à 298 K (où R est la constante des gaz parfaits, T la température et F le faraday).

C.1. Déterminer le nombre d'oxydation de l'azote dans les espèces suivantes : NO_2 , NO_2^- et NO_3^- .

C.2. L'acide nitreux HNO_2 et l'ion nitrite NO_2^- forment un couple acido-basique de $\text{pK}_a = 3,3$. Donner le diagramme de prédominance de HNO_2 et NO_2^- en fonction du pH.

C.3. Dismutation du dioxyde d'azote

C.3.1. Ecrire l'équation de la réaction de dismutation du dioxyde d'azote $\text{NO}_{2(g)}$ en présence d'eau avec comme produits de la réaction les ions nitrate NO_3^- , les ions nitrite NO_2^- et les ions H_3O^+ après avoir écrit les demi-équations rédox adéquates.

C.3.2. Exprimer la constante d'équilibre de cette réaction de dismutation, K° et la calculer à partir des données, à 298 K.

C.4. Cette réaction est à l'origine de la formation des pluies acides.

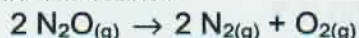
Une atmosphère de pression totale $P = 1,0$ bar, chargée en dioxyde d'azote, se trouve en équilibre avec une eau de pH = 4,2, l'acidité provenant de la réaction de dismutation de $\text{NO}_{2(g)}$ dans l'eau.

Après avoir établi un tableau d'avancement de cette réaction de dismutation, calculer la pression partielle, en bar, de $\text{NO}_{2(g)}$ à l'équilibre.

En déduire la fraction molaire correspondante $x(\text{NO}_{2(g)})$.

D. Cinétique

A température suffisamment élevée, le monoxyde de diazote se décompose en diazote et en dioxygène selon une réaction pratiquement totale décrite par le schéma réactionnel suivant :



Pour étudier cette réaction, on introduit dans un réacteur thermostaté à la température T, de volume constant V, préalablement vidé, une quantité n_1 de monoxyde de diazote à la pression initiale P_1 . On suit l'évolution de la réaction en mesurant la pression totale P en fonction du temps t.

A la température $T = 600\text{ }^{\circ}\text{C}$, on obtient les résultats suivants :

t en min	0	25	45	90
P/P ₁	1,000	1,120	1,195	1,314

D.1. On suppose que la réaction est d'ordre 1 par rapport à N_2O et on appelle k la constante de vitesse à la température T . Soit ξ l'avancement de la réaction à l'instant t . Montrer que l'expression de ξ peut s'écrire : $\xi = \frac{n_1}{2}(1 - e^{-2kt})$.

D.2. Déterminer l'expression du nombre total de moles gazeuse n_{Tg} en fonction de n_1 , k et t .

D.3. En déduire que l'on a la relation $\frac{P}{P_1} = \frac{1}{2}(3 - e^{-2kt})$.

D.4. On veut tracer une courbe permettant de vérifier l'ordre 1 et de calculer k . Si on impose le temps en abscisse, que peut-on mettre en ordonnée ? Vérifier ces résultats expérimentaux, soit de façon graphique soit par une régression linéaire et donner la valeur numérique de la constante de vitesse k à la température T .

D.5. En déduire le temps de 1/2 réaction $t_{1/2}$.

E. Synthèse de NH_3

On étudie la réaction en phase gazeuse $\text{N}_{2(g)} + 3 \text{H}_{2(g)} = 2 \text{NH}_{3(g)}$

On assimile les gaz à des gaz parfaits et le mélange de gaz est supposé idéal.

Données à 298 K des enthalpies standard molaires de formation $\Delta_f H^\circ$ et des entropies standard molaires S° des différentes espèces :

	$\Delta_f H$ en kJ.mol^{-1}	S° en $\text{J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$
$\text{N}_{2(g)}$	0	191,5
$\text{H}_{2(g)}$	0	130,6
$\text{NH}_{3(g)}$	- 46,2	192,5

Constante des gaz parfaits $R = 8,314 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

E.1. Industriellement, comment se procure-t-on le dihydrogène et le diazote ?

E.2. Grandeurs standard

E.2.1. Justifier pourquoi l'enthalpie standard de formation de $\text{N}_{2(g)}$ et celle de $\text{H}_{2(g)}$ sont nulles à 298 K.

E.2.2. Pourrait-on dire la même chose à 350 K ?

E.2.3. Calculer, à 298 K :

E.2.3.a. la valeur de l'enthalpie standard de cette réaction $\Delta_r H^\circ(298 \text{ K})$; commenter son signe.

E.2.3.b. la valeur de l'entropie standard de cette réaction $\Delta_r S^\circ(298 \text{ K})$.
Pouvait-on prévoir son signe ?

E.3. Quelle est l'influence d'une élévation de pression à température constante sur cet équilibre ? Justifier.

E.4. On suppose dans la suite que $\Delta_r H^\circ$ et $\Delta_r S^\circ$ sont indépendantes de la température.

E.4.1. Comment s'appelle cette approximation ?

E.4.2. Quelle est l'influence d'une élévation de température à pression constante sur cet équilibre ? Justifier.

E.5. Constante d'équilibre

E.5.1. Donner, dans le cadre de cette approximation, l'expression de l'enthalpie libre standard de réaction $\Delta_r G^\circ(T)$ en fonction de la température.

E.5.2. Déterminer la valeur de la constante d'équilibre K° à 0 °C et à 450 °C.

E.5.3. Cette synthèse est réalisée industriellement à une température voisine de 450 °C. Justifier ce choix.

E.6. On réalise la réaction à une pression totale constante P et à une température T maintenue à 450 °C, température pour laquelle la constante d'équilibre vaut $K = 2,1 \times 10^{-4}$.

E.6.1. On rappelle que l'activité a_i d'une espèce gazeuse $A_{i(g)}$ dans un mélange idéal de gaz parfaits s'écrit $a_i = P_i/P_0$ où P_i est la pression partielle de cette espèce.

Comment appelle-t-on la pression P_0 et quelle est sa valeur ?

E.6.2. Exprimer la constante d'équilibre K° de la synthèse de NH_3 en fonction des pressions partielles des différentes espèces à l'équilibre et de P_0 .

E.6.3. On suppose que l'on part d'un mélange stœchiométrique de N_2 et de H_2 (on appelle n_0 la quantité initiale de N_2) et on appelle α le coefficient de dissociation de N_2 à l'équilibre. Etablir le tableau d'avancement de la réaction et en déduire le nombre total de moles gazeuses à l'équilibre n_{Tg} en fonction de n_0 et α .

E.6.4. En déduire l'expression des pressions partielles à l'équilibre de NH_3 , N_2 et H_2 en fonction de P , P_0 et α .

E.6.5. Montrer que l'on a $K^\circ = \frac{16}{27} \frac{\alpha^2 (2-\alpha)^2}{(1-\alpha)^4} \left(\frac{P_0}{P} \right)^2$

E.6.6. Le taux de dissociation à l'équilibre vaut $\alpha = 0,52$ pour une température de 450 °C. En déduire la valeur de la pression totale P .

F. Chimie organique

Découverte en 1887, la phénacétine est un composé organique aromatique utilisé principalement comme analgésique. Cet effet est dû à l'action de la phénacétine sur les zones sensorielles de la moëlle épinière. C'est également un antipyrétique qui agit sur le cerveau pour diminuer la température.

En 1983, la phénacétine a été retirée du marché du fait de son lien dans certains cancers chez l'homme et l'animal.

Le paracétamol, qui est un métabolite de la phénacétine, possède des propriétés analgésiques et antipyrétiques similaires, mais est dénué de ses effets secondaires.

F.1. Etude de la phénacétine :

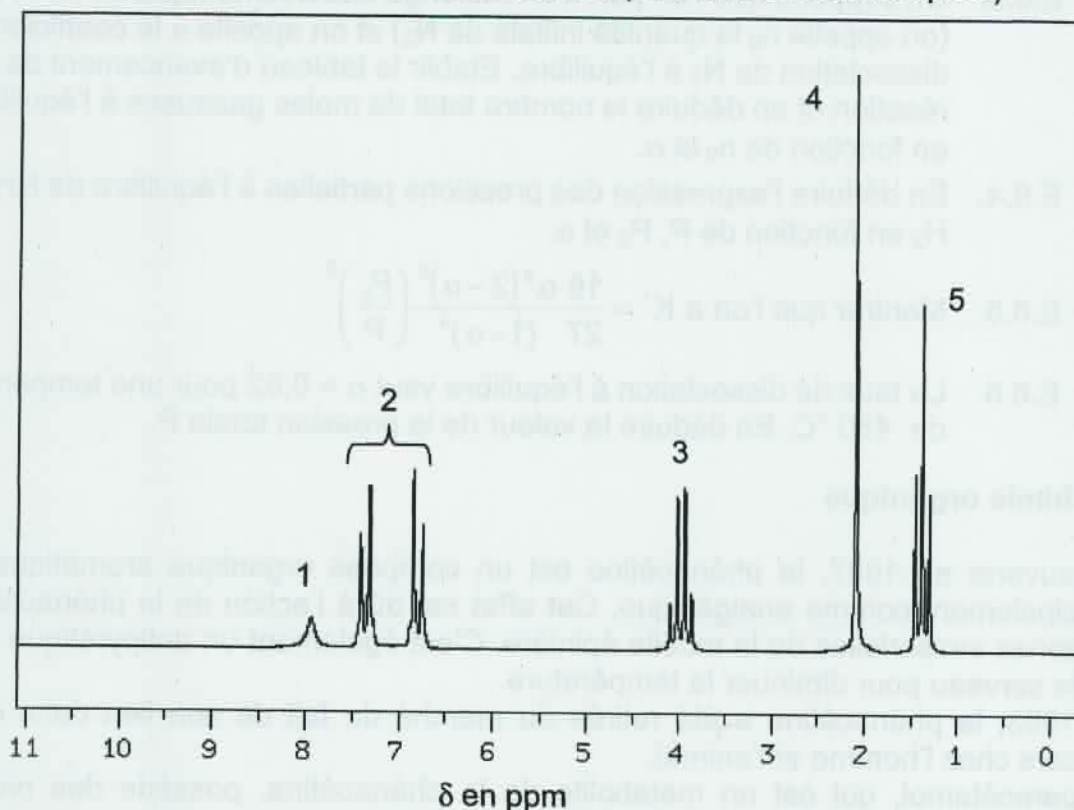
F.1.1. Citer les fonctions présentes, en plus du noyau aromatique, dans la molécule de phénacétine dont la formule est donnée ci-dessous :



F.1.2. On donne les tables nécessaires à l'interprétation du spectre RMN de la phénacétine (déplacement chimique δ en ppm (parties par million)) :

Type de proton	δ en ppm	Type de proton	δ en ppm	Type de proton	δ en ppm
-CH-C	0,8 à 1	-CH-C=C-	1,6 à 2,2	H ₂ C=C	4,5 à 5,3
-CH-X	2,5 à 4	-CH-C-X	1 à 1,8	Ar-H	6 à 8
-CH-O-C=O	3,7 à 4,8	-CH-C-CN	2 à 3	R-NH-	1 à 5
R-OH	1 à 6	-CH-C=O	2 à 2,7	R-CHO	9,5 à 9,9
R-COOH	10 à 13	-CH-Ar	2,3 à 3	-CH-O	3 à 4
-CH-O-Ar	3,7 à 4,3		8		5,5 à 8,5

Interpréter le spectre RMN de la phénacétine ci-dessous en justifiant la démarche (explication de la multiplicité (nombre de composantes) et de l'intensité relative des raies observées pour chacun des multiplets)



F.1.3. Outre la phénacétine et le paracétamol, proposer le nom d'une molécule étudiée dans l'enseignement secondaire ayant les mêmes propriétés

médicales que ces deux dernières molécules. Donner sa formule semi-développée. Quels sont les effets indésirables de cette molécule ?

F.2. Synthèse de la phénacétine

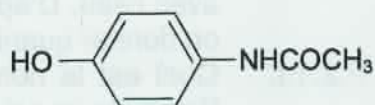
Cette synthèse s'effectue en deux étapes : la synthèse de paracétamol et la transformation du paracétamol en phénacétine.

F.2.1. Synthèse du paracétamol :

Une synthèse du paracétamol consiste à faire réagir le para-aminophénol (ou 4-aminophénol) et l'anhydride éthanoïque en milieu aqueux. Cette synthèse peut être proposée au cours de l'enseignement de spécialité de terminale S. Le protocole suivant est proposé à des élèves de ce niveau :

Données :

Formule du paracétamol



Para-aminophénol : $M(\text{para-aminophénol}) = 109,13 \text{ g.mol}^{-1}$

$T_{\text{fus}} = 187^\circ \text{C}$

Très peu soluble dans l'eau :

0,8 g dans 100 g à 20°C

8,5 g dans 100 g à 96°C

Très soluble dans l'éthanol à chaud et à froid.

Toxique par contact et par inhalation.

Paracétamol : $M(\text{paracétamol}) = 151,16 \text{ g.mol}^{-1}$

$T_{\text{fus}} = 170^\circ \text{C}$

Solubilités dans l'eau :

1 g dans 100 g à 20°C

25 g dans 100 g à 100°C

Soluble dans l'éthanol à chaud et à froid.

Anhydride éthanoïque : $M(\text{anhydride éthanoïque}) = 102,09 \text{ g.mol}^{-1}$

$T_{\text{fus}} = -73,1^\circ \text{C}$

$T_{\text{éb}} = 139,5^\circ \text{C}$

Densité : 1,0820

Corrosif et inflammable.

- Dans un ballon tricol de 250 cm^3 muni d'une agitation mécanique, d'un réfrigérant à reflux et d'une ampoule de coulée, introduire 10,0 g de para-aminophénol.
- Sous agitation vigoureuse, ajouter 30 cm^3 d'eau puis $12,0 \text{ cm}^3$ d'anhydride éthanoïque.
- Porter le mélange à reflux pendant environ 30 minutes.
- Refroidir puis transvaser dans un bécher. Refroidir dans un bain de glace : le paracétamol précipite.
- Filtrer sur filtre Büchner et laver à l'eau glacée.

- Essorer et sécher sur papier filtre. Placer le produit brut humide obtenu à l'étuve à 90 °C pendant 30 minutes : on obtient alors une masse de produit brut sec : $m = 10,2 \text{ g}$.

- F.2.1.a. Nommer les fonctions présentes dans la molécule de paracétamol. Donner le nom officiel (UICPA) du paracétamol.
 - F.2.1.b. Ecrire la formule semi-développée de l'anhydride éthanóique et entourer le groupe fonctionnel présent.
 - F.2.1.c. Ecrire la formule semi-développée du para-aminophénol.
 - F.2.1.d. Ecrire l'équation de la réaction de synthèse. L'anhydride éthanóique aurait-il pu réagir de façon différente ? Quelle conclusion peut-on en tirer sur la nucléophilie comparée entre l'oxygène et l'azote ?
 - F.2.1.e. Ecrire l'équation-bilan de la réaction de l'anhydride éthanóique avec l'eau. D'après le mode opératoire, quelle conclusion peut-on donner quant à la cinétique de cette réaction ?
 - F.2.1.f. Quel est le nom du montage utilisé lors de cette synthèse ? Proposer un schéma légendé de ce montage.
 - F.2.1.g. Comment peut-on vérifier la qualité des lavages à l'issue de la filtration ?
 - F.2.1.h. Quelle technique peut-on utiliser afin de purifier le paracétamol brut synthétisé à l'aide de ce protocole ? Quel solvant aurait-on pu choisir lors de la mise en œuvre de cette technique ?
 - F.2.1.i. Après purification du paracétamol brut, un groupe d'élèves récupère une masse de produit purifié $m' = 8,3 \text{ g}$. Calculer le rendement de cette synthèse.
- F.2.2. Transformation du paracétamol en phénacétine :
- Le paracétamol peut être transformé en phénacétine en milieu basique en présence de bromoéthane.
- F.2.2.a. Ecrire l'équation de cette réaction.
 - F.2.2.b. De quel type de réaction s'agit-il ? Proposer un mécanisme réactionnel.

Deuxième partie : Physique

L'atmosphère est constituée d'un mélange gazeux (l'air) comprenant surtout le diazote (78 % en volume) et le dioxygène (21%). On y trouve également de l'argon (environ 1%), du dioxyde de carbone (0,03 %), de la vapeur d'eau en proportion variable et des traces d'une multitude d'autres gaz.

Données des masses molaires en g.mol^{-1} N : 14 O : 16 Ar : 40

Constante des gaz parfaits $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

A. Etude de la pression en fonction de l'altitude

Dans cette première partie, on néglige la vapeur d'eau ; on étudie donc l'air sec. On suppose dans tout le problème que l'air est un mélange idéal de gaz parfaits. Pour toute cette partie, on considère l'intensité de la pesanteur $g = 9,81 \text{ N.kg}^{-1}$.

A.1. Gaz parfait

A.1.1. Rappeler, en quelques lignes, le modèle du gaz parfait. Donner l'équation d'état correspondante.

A.1.2. Quand peut-on considérer qu'un gaz réel se comporte comme un gaz parfait ?

A.2. Montrer à partir de la composition de l'air que la masse molaire de l'air vaut $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$.

A.3. Atmosphère isotherme en équilibre.

On appelle Oz l'axe vertical ascendant et on suppose le champ de pesanteur uniforme.

On note respectivement P , T et μ les pression, température et masse volumique de l'air à une altitude z quelconque et par P_0 , T_0 et μ_0 les valeurs correspondantes à l'altitude $z = 0$. On prendra $P_0 = 1,03 \text{ bar}$.

On fait tout d'abord l'hypothèse que l'atmosphère est en équilibre isotherme à la température $T_0 = 288 \text{ K}$.

A.3.1. On admet que l'air suit la loi des gaz parfaits. Montrer alors que

$$P = \frac{\mu}{M} RT.$$

A.3.2. Dans le cas où Oz est l'axe vertical ascendant, la loi de la statique des fluides dans le champ de pesanteur s'écrit : $\frac{dP}{dz} = -\mu g$.

A.3.2.a. Montrer qu'à l'altitude z , $P(z) = P_0 e^{-\frac{z}{H}}$; donner l'expression de H en fonction de M , g , T_0 et R .
Quelle est la dimension de H ?

Calculer H numériquement. Quelle est la signification de H ?

A.3.2.b. Tracer l'allure de la courbe $P(z)$ et calculer $P(z = 5,0 \text{ km})$

A.3.2.c. Déterminer l'expression de $\mu(z)$ en fonction de μ_0 , z et H .
Calculer μ_0 et $\mu(z = 5,0 \text{ km})$.

A.4. Equilibre polytropique de l'atmosphère

Le modèle de l'atmosphère en équilibre isotherme n'étant pas très réaliste, on

suppose désormais que dans la troposphère, c'est-à-dire jusqu'à une altitude d'environ 10 km, la température de l'air varie avec l'altitude sous la forme : $T(z) = T_0 (1 - k z)$ où k est une constante positive.

A.4.1. Montrer que la pression à l'altitude z varie sous la forme $P(z) = P_0(1 - kz)^\alpha$. Donner l'expression de α en fonction de M , g , k , R et T_0 .

A.4.2. Donner l'expression de $\mu(z)$ en fonction de μ_0 , z , k et α .

AN : $k = 2,20 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$; $T_0 = 288 \text{ K}$

Calculer $P(z)$ et $\mu(z)$ pour $z = 5,0 \text{ km}$.

A.5. Application : ascension d'un ballon à hélium

On se place toujours dans le modèle de l'équilibre polytropique de l'atmosphère. Un ballon de volume maximal $V_{\max} = 1000 \text{ m}^3$ est partiellement gonflé au sol avec un volume $V_0 = 500 \text{ m}^3$ d'hélium. La masse totale de l'enveloppe (hélium non compris) et de la nacelle est $m = 450 \text{ kg}$. L'enveloppe est munie d'une soupape qui assure l'équilibre thermique et mécanique entre l'hélium et l'air extérieur.

A.5.1. Montrer que le rapport des masses volumiques de l'hélium contenu dans l'enveloppe et de l'air extérieur $d = \mu_{\text{He}}/\mu_{\text{air}}$ est indépendant de l'altitude lors de l'ascension. Calculer d sachant que la masse molaire de l'hélium vaut $M_{\text{He}} = 4,0 \text{ g.mol}^{-1}$.

A.5.2. On appelle force ascensionnelle la somme des forces extérieures s'exerçant sur le ballon, en mouvement rectiligne le long de l'axe (Oz). Déterminer l'expression de cette force au sol, en fonction de g , m , d , μ_0 et V_0 .

A.5.3. A quelle condition le ballon s'élève-t-il ? Cette condition est-elle remplie ici ?

A.5.4. Exprimer le volume $V(z)$ au cours de l'ascension tant que $V(z) < V_{\max}$ (le nombre de moles d'hélium dans le ballon restant constant pendant cette phase).

A.5.5. Calculer l'altitude maximale z_1 atteinte lorsque le volume atteint sa valeur maximale.

A.5.6. Lorsque le ballon atteint cette altitude, le volume de l'enveloppe reste constant. Le ballon continuant à s'élever, le gaz sort alors par la soupape pour assurer l'équilibre thermique et mécanique avec l'air extérieur. Montrer que la force ascensionnelle décroît jusqu'à s'annuler : le ballon atteint alors son plafond d'altitude : calculer l'altitude correspondante z_2 .

B. Humidité de l'air

Pour tenir compte de la présence de vapeur d'eau, il faut connaître l'évolution de l'humidité relative de l'atmosphère en fonction de la température et de l'altitude.

On appelle humidité relative à la température T , le rapport, noté HR et exprimé en %, entre la pression partielle de vapeur d'eau et la pression de vapeur saturante à la même température T

$$HR(T) = 100 \cdot \frac{P_{\text{H}_2\text{O}}}{P_{\text{H}_2\text{O}}^{\text{sat}}(T)}.$$

Nous allons étudier des dispositifs permettant de mesurer l'humidité relative de l'atmosphère.

Ce type de dispositifs utilise un capteur constitué d'un condensateur dont la capacité varie avec l'humidité.

Pour mesurer la capacité du condensateur, on le place dans le circuit schématisé ci-dessous comprenant une bobine d'inductance L et une résistance R modélisant la résistance totale du circuit.

Le générateur fournit une tension E continue.
L'interrupteur K est d'abord placé en position 1.

B.1. Quelle valeur prend alors la tension u_C ?

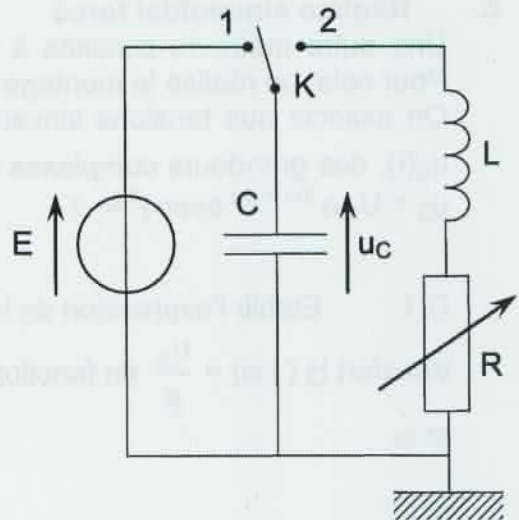
B.2. A l'instant choisi comme instant $t = 0$, on bascule l'interrupteur en position 2.

B.2.1. Etablir l'équation différentielle à laquelle satisfait la tension $u_C(t)$.

On pose $\lambda = \frac{R}{2L}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Montrer que l'équation différentielle établie précédemment peut alors s'écrire:

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2\lambda \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0$$



B.2.2. Ecrire l'équation caractéristique associée à cette équation différentielle.

B.2.3. Pour une valeur de R inférieure à une valeur R_C (appelée résistance critique), le régime est pseudo-périodique.
Exprimer R_C en fonction de L et C .

B.2.4. On se place dans le cas où $R < R_C$. La solution de l'équation différentielle peut alors s'écrire :

$$u_C(t) = e^{-\lambda t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$$

B.2.4.a. Donner l'expression de ω en fonction de ω_0 et λ .

B.2.4.b. Y a-t-il continuité de la tension u_C à $t = 0$? Justifier.

B.2.4.c. Y a-t-il continuité de la grandeur $\frac{du_C}{dt}$ à $t = 0$? Justifier.

B.2.4.d. A partir des réponses aux questions précédentes, déduire les expressions de A et B .

B.2.4.e. Donner l'allure de la courbe $u_C(t)$.

B.2.5. On se place maintenant dans le cas où $R = 0$.

B.2.5.a. Donner l'équation différentielle satisfaite par $u_C(t)$ ainsi que la solution correspondante en prenant les mêmes conditions initiales qu'à la question B2.

Donner l'expression de la période propre du circuit T_0 en fonction de L et C .

B.2.5.b. En présence d'humidité dans l'atmosphère, on mesure une période $T_0 = 27,2 \mu s$. Sachant que l'inductance de la bobine vaut $L = 150 \text{ mH}$, calculer la capacité C du condensateur.

B.2.5.c. On peut lire sur la notice d'un tel appareil :

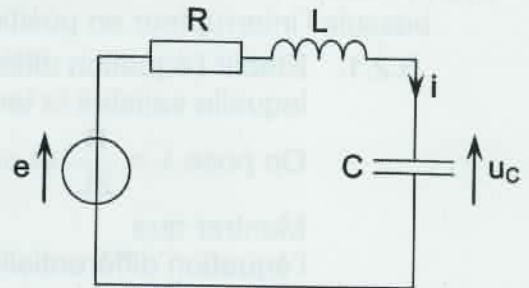
- ✓ Gamme de mesures : 10 à 90 % d'HR
- ✓ Sensibilité : 0,4 pF / % d'HR
- ✓ Capacité à 43% d'HR : 122 pF

- B.2.5.c.1. Sachant que la capacité C du capteur s'écrit sous la forme $C = a.HR + b$, déterminer les valeurs des constantes a et b .
- B.2.5.c.2. Dans les conditions de la question B.2.5.b, déterminer le taux d'humidité HR de l'atmosphère.

C. Régime sinusoïdal forcé

Une autre méthode consiste à soumettre le dipôle RLC à une tension sinusoïdale. Pour cela, on réalise le montage schématisé ci-dessous :

On associe aux tensions sinusoïdales, $e(t)$ et $u_C(t)$, des grandeurs complexes : $\underline{e} = E e^{j\omega t}$ et $\underline{u}_C = U_C e^{j(\omega t + \varphi)}$ avec $j^2 = -1$



$$e(t) = E \cos(\omega t)$$

- C.1. Etablir l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_C}{\underline{e}}$ en fonction de R , L , C et ω .

- C.2. On introduit le facteur de qualité $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ et la pulsation $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

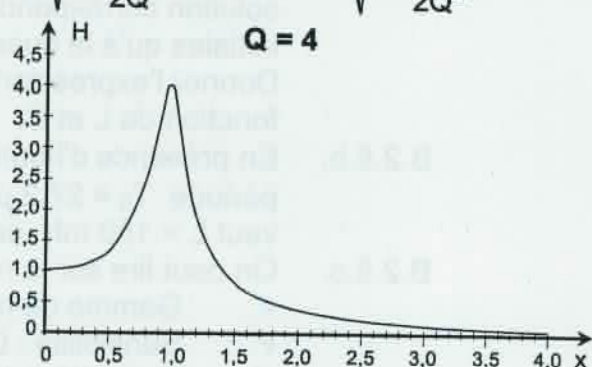
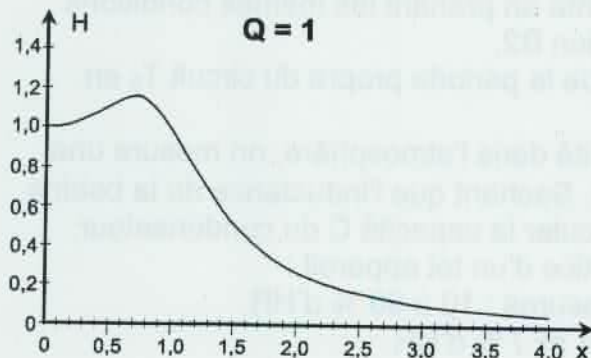
$$\text{Montrer alors que l'on a } \underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}.$$

- C.3. Déterminer l'expression du module, $H(\omega)$, de la fonction de transfert en fonction de ω , ω_0 et Q .

- C.4. On montre que si $Q > \frac{\sqrt{2}}{2}$, le gain passe par un maximum pour une pulsation ω_M qui dépend de ω_0 et Q . On donne ci-après les courbes $H(x)$ pour $Q = 1$ et $Q = 4$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

D'après les courbes données ci-dessous, choisir parmi les 2 expressions

suivantes celle qui donne ω_M : $\omega_M = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ ou $\omega_M = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{2Q^2}}$.



C.5. Dans le cas où Q est très grand devant 1, le rapport $\frac{|\omega_M - \omega_0|}{\omega_0}$ est sensiblement

égal à $\frac{1}{4Q^2}$.

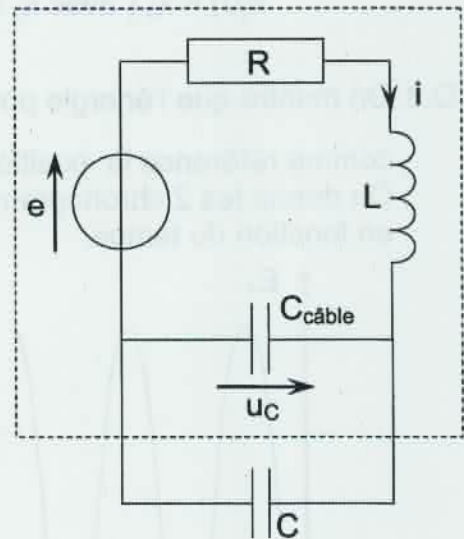
Pour $R = 10 \Omega$, $L = 100 \text{ mH}$ et $C = 130 \text{ pF}$, calculer le facteur de qualité Q et en

déduire l'écart relatif $\frac{|\omega_M - \omega_0|}{\omega_0}$.

Peut-on confondre ω_M et ω_0 ?

C.6. Pour relier le capteur situé à l'extérieur d'un bâtiment au dispositif de mesure situé à l'intérieur, on utilise un câble coaxial d'une longueur d'environ 5 m de capacité $C_{\text{câble}} \approx 100 \text{ pF}$ et sensible aux variations d'humidité de l'air.

Le schéma équivalent devient alors celui représenté ci-contre.



On mesure donc la capacité $C_{\text{éq}}$ équivalente à C en parallèle avec $C_{\text{câble}}$.

C.6.1. Exprimer $C_{\text{éq}}$ en fonction de C et $C_{\text{câble}}$.

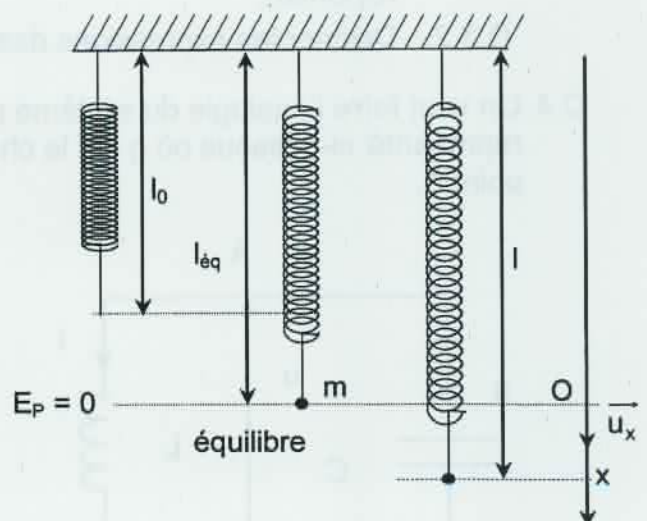
C.6.2. Quel est l'inconvénient majeur de ce montage ?

D. Analogies électromécaniques

On considère un ressort vertical de masse négligeable, à spires non jointives, de constante de raideur k , de longueur à vide l_0 , fixé à son extrémité supérieure et un corps M de masse m qui est accroché à son extrémité inférieure. On utilise les notations suivantes :

- $\vec{u}_x$: vecteur unitaire définissant la direction de l'axe $x'x$ et le sens de la verticale descendante ;
- $\vec{g} = g\vec{u}_x$.

On fait l'étude dans le référentiel R du laboratoire supposé galiléen et les déplacements envisagés sont verticaux.



D.1. Déterminer la longueur du ressort à l'équilibre l_{eq} en fonction de l_0 , m , g et k .

D.2.

D.2.1. On appelle x le déplacement de M par rapport à sa position d'équilibre ; on a donc la longueur du ressort qui s'écrit à un instant t quelconque $l = l_{eq} + x$.

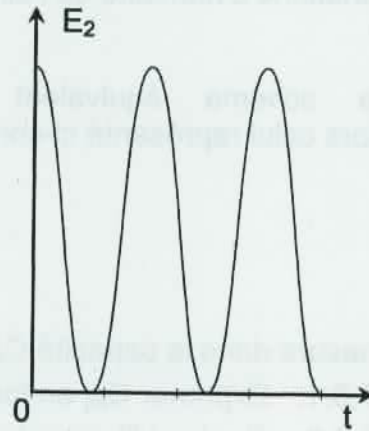
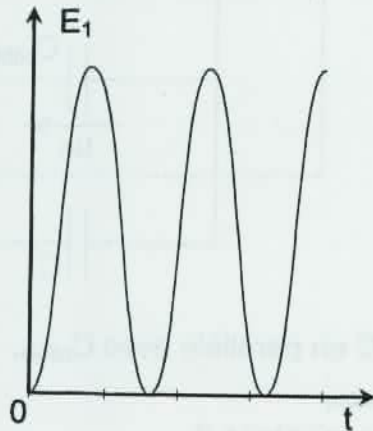
Après avoir fait un bilan des forces appliquées à M dans R , déterminer l'équation différentielle (Eq1) vérifiée par x (on posera $\omega_0^2 = k/m$).

D.2.2. Donner la solution de cette équation différentielle en prenant comme conditions initiales :

$$x(0) = x_0 \text{ (avec } x_0 > 0 \text{) et } \dot{x}(0) = 0$$

D.3. On montre que l'énergie potentielle totale E_p de M s'écrit $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ en prenant comme référence la position d'équilibre $x = 0$.

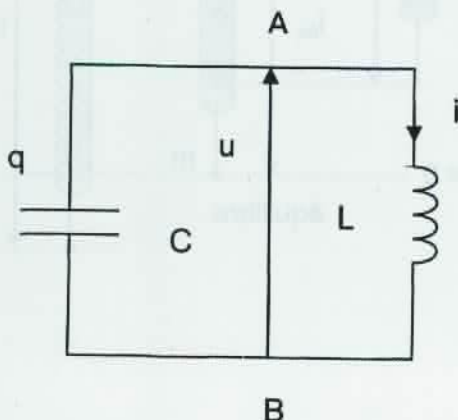
On donne les 2 chronogrammes ci-dessous correspondant à 2 énergies E_1 et E_2 en fonction du temps.



D.3.1. Identifier E_p et E_c où E_c est l'énergie cinétique du corps M (on justifiera la réponse).

D.3.2. Donner les expressions des maxima de E_p et E_c en fonction de k et x_0 .

D.4. On veut faire l'analogie du système précédent avec un circuit L, C en électricité représenté ci-dessous où q est la charge de l'armature du condensateur reliée au point A .



- D.4.1. Donner l'expression générale de l'énergie $E_{\text{élec}}$ stockée dans un condensateur.
- D.4.2. Donner l'expression générale de l'énergie E_{mag} emmagasinée dans une bobine.
- D.4.3. On suppose que, compte tenu des conditions initiales, on peut écrire pour la charge du condensateur $q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t)$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.
En déduire l'expression de $i(t)$.

D.5. Donner les équivalents électriques des grandeurs suivantes : x , $\dot{x}$, k , m , E_p et E_c .

D.6. Dans la réalité, l'énergie totale diminue progressivement. En mécanique, cette perte d'énergie est liée aux forces de frottement fluide qui s'exercent sur l'objet en mouvement.

- D.6.1. D'où provient la perte d'énergie dans un circuit électrique ?
- D.6.2. Le graphe ci-dessous donne l'évolution en fonction du temps de l'énergie électrostatique, de l'énergie magnétique et de l'énergie totale d'un circuit R,L,C. Identifier les différentes courbes en supposant que le condensateur est chargé à $t = 0$.
Quelle est l'expression de l'énergie perdue ?
Justifier alors la diminution avec paliers de l'énergie totale du circuit.

